**Зарождение науки о закономерностях случайных явлении**

**Понятие вероятности и зарождение науки о закономерностях случайных явлении.**

Случай, случайность — с ними мы встречаемся повседневно: случайная встреча, случайная поломка, случайная находки, случайная ошибка. Этот ряд можно продолжать бесконечно. Казалось бы, тут лет места для математики—какие уж законы в царстве Случая! Но и здесь наука обнаружила интересные закономерности—они позволяют человеку уверенно чувствовать себя при встреча со случайными событиями.

Как наука теория вероятности зародилась в 17в. Возникновение понятия вероятности было связано как с потребностями страхования, получившего значительное распространение в ту эпоху, когда заметно росли торговые связи и морские путешествия, так и в связи с запросами азартных игр. Слово “азарт”, под которым обычно понимается сильное увлечение, горячность, является транскрипцией французского слова **hazard**, буквально означающего “случай”, “риск”. Азартными называют те игры, а которых выигрыш зависит главным образом не от умения игрока, а от случайности. Схема азартных игр была очень проста и могла быть подвергнута всестороннему логическому анализу. Первые попытки этого рода связаны с именами известных учёных—алгебраиста Джероламо Кардана (1501- 1576) и Галилео Галилея (1564—1642). Однако честь открытия этой теории, которая не только даёт возможность сравнивать случайные величины, но и производить определенные математические операции с ними, принадлежит двум выдающимися ученым—Блезу Паскалю (1623—1662) и Пьеру Ферма. Ещё в древности было замечено, что имеются явления, которые обладают особенностью: при малом малом числе наблюдений над ними не наблюдается никакой правильности, но по мере увеличения числа наблюдений всё яснее проявляется определенная закономерность. Всё началось с игры в кости.

Азартные игры практиковались в ту пору главным образом среди знати, феодалов и дворян. Особенно распространенной была игра в кости. Было замечено. что при многократном бросании однородного кубика, все шесть граней которой отмечены соответственно числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 число очков от 1 до 6 выпадают в среднем одинаково часто, иными словами, выражаясь языком математики, выпадение определённого числа очков имеет вероятность, равную 1/6 (т.е. отношению числа случаев, благоприятствующих событию к общему числу всех случаев'). Аналогично вероятность появления на верхней грани кости чётного числи очков равна 3/6 ,так как из шести равновозможных случаев чётное число появляется только в трёх.

Один из представителей французской знати того времени, страстный игрок де Мере написал одному из крупнейших учёных тоги времени Блезу Паскалю письмо, в котором просил ответить на ряд вопросов, возникших у него в связи с игрой к кости.

Задача кавалера де Мере. Кавалер де Мере, один из французских придворных, былазартным игроком. Денежный выигрыш при игре в косит обычно зависит от комбинации выпивших чисел, на которую делается ставки. Одна из таких комбинаций—выпадение хотя бы одной шестёрки при четырёх бросаниях игральной кости. Де мере смог подсчитать число шансов этой комбинации. Общее число исходов при четырёх бросаниях игральной кости равно 64=1296. Число шансов появления хотя бы одной шестерки составляет 6-5 =671 , так как шестёрки не выпадает ни разу в 5 случаях. Следовательно, вероятность выпадения хотя бы одной шестёрки при четырёх бросаниях равна 671/1296~0,518> 1/2, поэтому при четырёх бросаниях выгодно делать ставку на то, что выпадет хотя бы одни шестёрка. чем на то, что не выпадет ни одной. Повидимому, многие опытные игроки знали, что первая комбинация появляется чаще, чем вторая, и найти партнёра ни такую игру было трудно. Более сложные комбинации возникали, если бросали сразу две кости. Де Мере пытался определить, сколько раз надо бросить пару костей, чтобы вероятность хотя бы одного появления двух шестёрок была больше 1/2. Он подсчитал, что достаточно 24 бросаний. Однако опыт игрока заставил де Мере сомневаться в правильности своих вычислений. Тогда он обратился с этой задачей к математику Блезу Паскалю, который предложил правильное решение. Учёный определил, что при 24 бросаниях пары костей две шестёрки появляются хотя бы раз с вероятностью, меньшей 1/2, а при 25 бросаниях—с вероятностью, большей 1/2.В самом деле, если бросить один раз пару костей, две шестёрки выпадут с вероятностью 1/36, а не выпадут—с вероятностью 1-1/36=35/36. При **n** бросаниях пары костей число шансов непоявления пары шестерок равно 35, а общее число исходов составит 35.Поэтому игрок, делающий ставку на событие А выигрывает примерно а 50,5% игр, а игрок, делающий ставку на событие А —примерно в 49,1% игр. Эта задача кавалера де Мере заставила Паскаля заняться изучением случайных событий. А в переписке Блеза Паскаля и Пьера Ферма впервые стали упоминаться понятия теории вероятностей. Подсчёт всех возможных и благоприятствующих данному событию случаев нередко представляет большие трудности. Вот почему для решения таких задач некоторые игроки обращались к крупным учёным. Рассказывают, что Гюйгенсу был задан такой вопрос: “Если бросить одновременно три игральных кости, то какая сумма очков будет выпадать чаще—11 или 12?” Подсчёт всех различных случаев здесь прост: N=6 =216. Подсчёт же М здесь сложен. Сумма 11 может получиться следующими шестью различными способами: 1+4+6, 1+5+5, 2+3+6, 2+4+5, 3+3+5. 3+4+4. Также шестью различными способами образуется сумма 12: 1+5+6, 2+4+6, 2+5+5, 3+3+6, 3+4+5, 4+4+4. Это обстоятельство наводит на мысль, будто обе суммы должны появляться одинаково часто. Однако это неверно. Уже на практике было замечено, что сумма 11 появляется чаще суммы 12. Дело а том, что вышеуказанные по три числа сами по себе неодинаково часто выпадают. Так, если каждую из трех костей окрасить по-разному, скажем в белый, красный и зелёный цвет, то становится ясным, что сочетание, а котором имеются три различных слагаемых, например (1+4+6), может получаться шестью различными способами:

1) 1 бел. + 4 красн. + 6 зел.; 2) 1 бел. + б красн. + 4 зел.:

3) 4 бел. + 1 красн. + 6 зел.; 4) 4 бел. + 6 красн. + 1 зел.;

5) 6 бел. + 1 красн. + 4 зел.; 6) б бел. + 4 красн. + 1 зел. Аналогично сочетание с двумя одинаковыми слагаемыми, например (2+5+5), может получиться тремя различными способами, в то время как сочетания с одинаковыми слагаемыми, вроде (4+4+4), получается единственным способом. И вот для 11 очков мы получим, таким образом, не шесть различных способов, а

1\*6 + 1\*3 + 1\*6 + 1\*6 + 1\*3 + 1\*3 = 27.

Для суммы же 12 число различных способов будет:

1\*6 + 1\*6 + 1\*3 + 1\*3 + 1\*6+ 1 = 25.

Решение порой довольно сложных задач, с которыми обращались заинтересованные лица к Паскалю, Ферма, Гюйгенсу, способствовало разработке основных понятий и общих принципов теории вероятностей, в том числе и правил действия над ними. Отсюда не следует, конечно, заключать, что основоположники теории вероятностей рассматривали азартные игры как единственный или главный предмет разрабатывавшейся ими новой отрасли науки. На развитие теории вероятностей оказали влияние более серьёзные потребности науки и запросы практики, в первую очередь страховое дело, начатое в некоторых странах ещё в 16в. В 16-17вв. учреждение страховых обществ и страхование судов от пожара распространились во многих европейских странах. Азартные игры были для ученых только удобной моделью для решения задач и анализа понятий теории вероятности. Об этом заметил ещё Гюйгенс в своей книге “О расчётах в азартной игре” (1657), которая была первой книгой в мире по теории вероятностей. Он писал: “...при - внимательном изучении предмета читатель заметит, что он занимается не только игрой, а что здесь даются основы глубокой и весьма интересной”. Гюйгенс впервые ввёл важное для теории вероятностей понятие математического ожидания, которое получило дальнейшее развитие а трудах Даниила Бернулли, Даламбера и др. Понятие математического ожидания находит немало применений а разных других областях человеческой деятельности.

Таким образом, в 60-е годы 17в. были выработаны первые понятия и некоторые элементы теории вероятностей. В последующие два века учёные столкнулись с множеством новых задач, связанных с исследованием случайных явлений. Играет ли природа в кости?

В середине 19в. преподаватель Высшей реальной школы, в городе Брюнне Грегор Иоганн Мендель производил свои ставшие впоследствии знаменитыми опыты с горохом, в результате которых были открыты законы наследственности. Мендель скрестил два сорта гороха с жёлтыми и зелёными семенами, после чего растения дали только желтые семена (первое поколение гибридов). После самоопыления растений, выраженных из этих семян (второе поколение гибридов), появился горох и с жёлтыми, и с зелёными семенами Мендель подсчитал, что отношение числа растений с жёлтыми семенами к числу растений с зелеными семенами равно 3,01. Учёный скрещивал также сорта гороха, различающиеся либо по форме плода, либо по расположению цветков, либо по размерам растении и т.п. И каждый раз в первом поколении обнаруживался только один из противоположных родительских признаков—его Мендель назвал доминантным (от лат. dominatus—"господство"), лишь во втором поколении проявлялся и другой—регрессивный (от. лат. recessus— “отступление”), В опытах Менделя отношение числа растений с доминантным признаком к числу растений с рецессивным признаком было равно 3,15; 2,95; 2,82;

3,14;2,84, т.е. во всех случаях оказывалось близким к 3. Впоследствии немецкий зоолог Август Бейсман и американский биолог Томас Хант Морган объяснили результаты опытов Менделя. Используем с той же целью урновую схему. Предположим, что два элементарных носителя наследственности— доминантный ген А и рецессивный ген а—отвечают в организме за некий признак. При этом данный признак задаётся парой генов **АА**, **Аа**, **аА** или **аа**, и особи с генами **АА**, **Аа**, **аА** имеют доминантный признак, а особи с генами аа —рецессивный. При скрещивании гороха **АА** с горохом аа гибрид получает от каждого родителя по 1 гену, поэтому все особи первого поколения имеют пару генов **Аа** или **аА** и у них обнаруживается доминантный признак: например, семена желтого цвета. От родителей с парами генов **Аа** или **аА** можно получить особь **АА**, **Аа**, **аА** или **аа**. Все эти сочетания одинаково возможны, значит, особь аа с рецессивным признаком проявляется с вероятностью 1/4, а особь **АА**, **Аа** или **аА** с доминантным признаком—с вероятностью 3/4.

Механизм наследования так же случаен, как и исход бросания монеты или игральной кости. Поэтому можно сказать, что природа иногда “ играет в кости”.

Основные понятия теории вероятности

Теория вероятности, как и любой раздел математики, оперирует определённым кругом понятий. Большинству понятий теории вероятностей даются определение, но некоторые принимаются за первичные, не определяемые, как в геометрии точка, прямая, плоскость. Первичным понятием теории вероятностей является событие. Под событием понимают то, относительно чего после некоторого момента времени можно сказать одно и только одно из двух :

**Да, оно произошло.**

**Нет, оно не произошло.**

Например, у меня есть лотерейный билет. После опубликования результатов розыгрыша лотереи интересующее меня событие – выигрыш тысячи рублей либо происходит, либо не происходит. Любое событие происходит вследствие испытания (или опыта). Под испытанием (или опытом) понимают те условия, в результате которых происходит событие. Например, подбрасывание монеты – испытание, а появление на ней “герба” – событие. Событие принято обозначать заглавными латинскими буквами: A,B,C,… . События в материальном мире можно разбить на три категории – достоверные, невозможные и случайные.

Достоверное событие – это такое событие, о котором заранее известно, что оно произойдёт. Его обозначают буквой ****. Так, достоверным является выпадение не более шести очков при бросании обычной игральной кости, появление белого шара при извлечении из урны, содержащей только белые шары, и т.п.

Невозможное событие – это событие, о котором заранее известно, что оно не произойдёт. Его обозначают буквой ****. Примерами невозможных событий являются извлечение более четырёх тузов из обычной карточной колоды, появление красного шара из урны, содержащей лишь белые и чёрные шары, и т. п.

Случайное событие – это событие, которое может произойти или не произойти в результате испытания. События **А** и **В** называют несовместными, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. Так появление любого возможного числа очков при бросании игральной кости (событие **А**) несовместно с появлением иного числа (событие **В**). Выпадение чётного числа очков несовместно с выпадением нечётного числа. Наоборот, выпадение чётного очков (событие **А**) и числа очков, кратного трём (событие **В**),не будут несовместными, ибо выпадение шести очков означает наступление и события **А**,и события **В**, так что наступление одного из них не исключает наступление другого. С событиями можно совершать операции. Объединением двух событий **С**=**А**U**В** называется событие **С**, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из этих событий **А** и **В**. Пересечением двух событий **D**=**AВ**  называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят события и **А** и **В**.

Пусть **А** – некоторое событие. Тогда противоположным событию **А\*** к событию **А** называется такое событие, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие **А**. Рассмотрим некоторую совокупность событий **А, В,…,L**. Эти события принято называть единственно возможными, если в результате каждого испытания хотя бы одно из них наверное наступит. Говорят также, что рассматриваемые события образуют полную группу событий. Так, например, при бросании игральной кости полную группу образуют события, состоящие в выпадении одного, двух, трёх, четырёх, пяти и шести очков.

Одним из важных вопросов теории вероятностей является то, откуда берутся значения вероятностей исходов испытаний, ведь вероятности всех остальных событий мы будем получать, опираясь именно на эти вероятности. Здесь возможны два случая:

а) по каким –либо соображениям симметрии мы считаем все элементарные исходы равновозможными, в этом случае имеем **p1=p2=…=pn** , а так как **p1+p2+…+pn=1**, то все **pk**  равны 1/n,  **pk**= /n , 1<=k<=n;

б) вероятности **p1,…,pn** исходов **X1,…,Xn** определены предварительным проведением серии опытов, в этом случае за pkпринимают относительную частоту случаев, в которых произошло элементарное событие **Xk** (т.е. отношение **mk/M** числа **mk** таких случаев к общему числу **M** проведённых испытаний).

Подход а) называется классической схемой теории вероятностей, а подход б) – статистический подход. Например, если после проверки 1000 деталей оказалось, что среди них 3 бракованные, то принимают, что вероятность брака равна 0,003, или же 0,3%.В статистике изучается вопрос: какое число испытаний нужно произвести, чтобы полученные статистическим путём вероятности были достаточно надёжными?

Теперь мы можем перейти к рассмотрению важнейшего понятия вероятности события. Вероятность события **А** в науке обозначают символом **P(А)**, где **P** – начальная буква французского слова Probabilite – вероятность, **А** – слово Accident –случайность, происшествие.

Рассмотрим систему конечного числа событий **А1, A2, .... Аn** относительно которой сделаем следующие предположения:

**1.** Эти события попарно несовместны; иначе говоря, для любых двух событий **Ai** и **Аk** (i, k = 1, 2, ...., n, i  k) появление одного из них исключает появление другого.

2. События **A1,A2,...,An** единственно возможны, то есть какое-либо одно из них непременно должно наступить.

3. События **A1,A2,...,An** равновозможны. Это означает, что не существует никаких объективных причин, вследствие которых од­но из них могло бы наступить чаще, чем какое-либо другое.

Пусть имеется событие **A**, которое наступает при появлении не­которых из наших “элементарных” событий **A1,A2,...,An** и не на­ступает при появлении других. Мы будем говорить в таком случае, что те из “элементарные” событий **Аi**, при наступлении которых наступает также событие **A**, благоприятствуют событию **A**.

Допустим, что из общего числа п рассматриваемых событий **A1,A2,...,An** событию **А** благоприятствует **m** из них. Тогда вероят­ностью события **A** называется отношение числа событий, благо­приятствующих событию **А**, к общему числу всех равновозможных событий. Если, как это принято, обозначить вероятность события **A** через **Р(A)**, то мы получаем по определению

**Р(A)= m/n**\_\_

Поясним приведенное нами определение примером. Рассмотрим бросание игральной кости и обозначим через **A1,A2,...,An** события, состоящие в выпадении соответственно одного, двух,…, шести оч­ков. Эти события удовлетворяют всем сделанным выше предполо­жениям. Отсюда следует, что

P(A1)=P(A2)=…+P(A6)=1/6

потому что каждому из этих событий благоприятствует только оно само, так что здесь m = 1, а n = 6.

**1** Если событие **А** означает появление четного числа очков, то ему благоприятствуют события **A2, А4, А6**, состоящие в появлении двух, четырех и шести очков. Поэтому для события **А** имеем m= 3, так что

**Р(А)** = 3/6 =1/2.

Пусть событие **В** состоит в появлении числа очков, кратного трем. Тогда событию **В** благоприятствуют “элементарные” события **А3** и **А6**, откуда следует, что для события В имеем т = 2. Поэтому

**Р (В)** =2/6 = 1/3.

Легко заметить, что для любого события **А** число благоприятст­вующих событий **m** удовлетворяет неравенствам 0 < m <n. По­этому вероятность любого события **А** подчинена условиям

**0<=P(A)>=1**

Далее, если обозначить через **Е** некоторое достоверное событие, то ему, очевидно, должны благоприятствовать все “элементарные” события **Аi**, так что для него должно быть m =n . Поэтому вероят­ность достоверного события равна единиц:

**Р(Е) =1.**

Если, наоборот, **U** — невозможное событие, то из самого опре­деления следует, что здесь m = 0, так что вероятность невозможно­го события равна нулю:

**P(U)= 0**.

Рассмотрим несколько примеров, разъясняющих введенное нами понятие вероятности.

**Пример 1.**  В урне находятся три синих, восемь красных и десять белых шаров одинакового размера и веса, неразличимых наощупь. Шары тщательно перемешаны. Какова вероятность по­явления синего, красного и белого шаров при одном вынимании ша­ра из урны?

**Решение**. Так как появление любого шара можно считать равновозможным, то мы имеем всего n=3+8+9=20 элемен­тарных событий. Если через А, В, С обозначить события, состоя­щие в появлений соответственно синего, красного и белого шаров, а через m1,m2,m3— число благоприятствующих этим событиям случаев, то ясно, что m1=3,m2=8,m3=9. Поэтому

**P(A)**=3/20=0,15; **P(B)**=8/20=0,40; **P(C)**=9/20=0,45.

**Пример 2**. Одновременно брошены две монеты. Какова ве­роятность появления m гербов (m = 0, 1,2)?

**Решение.** Рассмотрим возможные при бросании двух монет исходы. Очевидно, их можно описать схемой

ГГ, ГР, РГ, РР,

где **Г** означает выпадение герба, а Р — надписи. Таким образом, возможны четыре элементарных события. Поскольку монеты пред­полагаются однородными и имеющими геометрически правильную форму, то нет никаких оснований предполагать, что одна из сторон какой-либо монеты выпадает чаще других. Поэтому все четыре слу­чая следует считать равновозможными. Но тогда, обозначив через **Pm** вероятность выпадения m гербов, легко получим:

P0=1/4; P1=2/4=1/2; P2=1/4.

**Пример 3.** Одновременно бросаются две игральные кости, на гранях которых нанесены очки 1, 2, 3, 4, 5, 6. Какова вероят­ность того, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна восьми?

**Решение.** Так как любое из возможного числа очков на од­ной кости может сочетаться с любым числом очков па другой, то общее число различных случаев равно n = 6 \* б = 36. Легко убе­диться в том, что все эти случаи попарно несовместны, равновозможны и образуют полную группу событий. Для ответа на вопрос сле­дует подсчитать, в каком числе случаев сумма очков равна восьми. Это будет, если число очков на брошенных костях равно

2 + 6, 3 + 5, 4 + 4, 5 + 3, 6 + 2,

причем первое слагаемое означает число очков на первой, а второе - на второй кости. Отсюда видно, что событию **А**, состоящему в том, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна восьми, благоприятствует m= 5 случаев. Поэтому

P(A)=5/36.

**Пример 4.** В мешке лежат 33 жетона, помеченные буквами русского алфавита. Из него извлекают жетоны и записывают соот­ветствующие буквы, причем вынутые жетоны обратно не возвра­щают. Какова вероятность того, что при этом получится слово “око”? слово “ар”?

**Решение.** Ошибочно было бы решать задачу так: вероят­ность извлечения любой буквы равна 1/33, поэтому вероятность сло­жить слово “око” равна 1/33^3, а вероятность сложить слово “ар” равна 1/33^2. Это было бы верно, если бы последовательные извлече­ния жетонов из мешка были независимы друг от друга. Но так как жетоны обратно в мешок не возвращаются, то, вынув в первый раз букву “о”,мы уже не получим ее при третьем извлечении. Поэто­му вероятность получить слово “око” равна нулю. Чтобы найти вероятность получения слова “ар”, заметим, что при двух извле­чениях букв получаются всевозможные размещения без повторе­ний из 33 букв по две, причем очевидно, что любые два таких раз­мещения равновероятны.Так как общее число этих размещений равно (А33)2 =33 **.** 32=1056 , то вероятность сложить слово “ар” равна 1/1056.

Этот пример показывает, что при решении многих задач теории вероятностей оказываются полезными формулы комбинаторики — при определенных условиях у нас с равной вероятностью получа­ются размещения с повторениями (если, например, жетоны извле­каются и потом возвращаются обратно), размещения без повторе­ний (если жетоны не возвращаются обратно), перестановки с повторениями и без повторений, сочетания и т. д. Долгое время комбинаторику вообще рассматривали как вспомогательную дис­циплину для теории вероятностей, но теперь она приобрела само­стоятельное значение.

**Сложные вероятности. Теоремы сложения .**

Непосредственный подсчёт случаев, благоприятствующих данному событию, может оказаться затруднительным. Поэтому для определения вероятности события бывает выгодно представить данное событие в виде комбинации некоторых других, более простых событий. Приведём теоремы, с помощью которых можно по вероятностям одних случайных событий вычислять вероятности других случайных событий, каким – либо образом связанных с первыми. Начнём с теорем, которые образуют группу с общим названием “теоремы сложения”.

**Теорема 1.** Пусть А и В – два несовместных события. Тогда вероятность того, что осуществится хотя бы одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей: **P(A** U **B)=P(A)+P(B).**

**Доказательство.**

Обозначим исходы, благоприятные для события **А**, через **а1,а2,…,аm** , а для события **В** – через **b1,b2,…,bn**. Вероятности этих исходов обозначим соответственно через **p1,p2,…,pm** и **q1,q2,…,qn** . Тогда событию **A** U **B** благоприятны все исходы **a1,a2,…,am , b1,b2,…,bn** . В силу того что события **А** и **В** несовместны, среди этих исходов нет повторяющихся. Поэтому вероятность события **А**U**B** равна сумме вероятностей этих исходов. т.е.

**P**(**A**U**B**)=p1+p2+…+pm+q1+q2+…+qn.

Но p1+p2+pm=**P**(A), q1+q2+qn=**P**(B), а потому

**P(A**U**B)=P(A)+P(B).**

Теорема доказана.

**Пример 1.** Стрелок стреляет в мишень. Вероятность выбить 10 очков равна 0,3 , а вероятность выбить 9 очков равна 0,6. Чему равна вероятность выбить не менее 9 очков?

**Решение.** Событие **А** “выбить не менее 9 очков” является объединением событий **В** - “выбить 10 очков” и **С** – “выбить 9 очков”. При этом события **В** и С несовместны, так как нельзя одним выстрелом выбить сразу и 9, и 10 очков.

Поэтому по теореме 1 имеем:

P(A)=P(B)+P(C)=0,3+0,6=0.9.

Если события **А1, А2, … ,Аn** попарно несовместны, то событие **A1**U … U**An-1** несовместно с событием **An** . В самом деле,

(A1U…UAn-1) I An =(A1An)U…U(An-1  An) .

Но при s<n имеем **As An =,** и потому **(A1**U**…**U**An-1)An =.** Пользуясь этим замечанием, получаем из **теоремы** **1** следствие:

**Следствие.** Если события А1,…, Аn попарно несовместны, то вероятность объединения этих событий равна сумме их вероятностей:

P(A1U…UAn)=P(A1)+**…**+P(An).

**Доказательство.** Как было отмечено выше, события A1U … UAn-1 и An несовместны, а потому по теореме 1имеем:

P(A1U…UAn-1UAn)=P(A1U…UAn-1)+P(An).

Применяя это же рассуждение к первому слагаемому и продолжая далее, получаем после n-1 шага, что

P(A1U … UAn)=P(A1)+…+P(An).

**Пример 2.** В цехе работает несколько станков. Вероятность того, что за смену потребует наладки ровно один станок, равна 0,2. Вероятность того, что за смену потребуют наладки ровно два станка, равна 0,13. Вероятность того, что за смену потребуют наладки больше двух станков, равна 0,07. Какова вероятность того, что за смену придётся проводить наладку станков?

**Решение.** В том примере опыт состоит в том, что прошла смена и отмечено, сколько станков за эту смену потребовало наладки. В этом опыте события: **А** – “за смену потребовал наладки ровно один станок”, **В** – “за смену потребовали наладки ровно два станка” и **С** – “ за сену потребовали наладки более двух станков” несовместны. Нас же интересует вероятность события **A**U**B**U**C**. По теореме 1: P(**A**U**B**U**C**)=P(A)+P(B)+P(C)=0,2+0,13+0,07=0,4.

Выведем теперь связь между вероятностями противоположных событий.

**Теорема 2.** Для любого события **А** имеем: P(A\*)=1-P(A).

Для доказательства вспомним, что AUA\*=**U**, P(**U**)=1 и A**** A\*. Тогда по теореме 1 получаем: 1=P(**U**)=P(AUA\*)=P(A)+P(A\*), откуда следует требуемая формула.

**Пример 3.** Берётся наудачу трёхзначное натуральное число от 100 до 999. Какова вероятность того, что хотя бы две его цифры совпадают?

**Решение.** Опыт здесь состоит в том, что наудачу выбирается натуральное число от 100 до 999 и смотрят, есть ли у негосовпадающие цифры. События “взяли наудачу число N” (N= 100, 101, … , 999) равновероятны (в этом смысл слова “наудачу” ) и образуют множество исходов этого опыта. Число исходов n=900. Нас интересует событие **А -** “у выбранного числа совпадают хотя бы две цифры”. Проще, однако, подсчитать вероятность противоположного события **А\*** - “у выбранного числа все цифры различны”. Каждое такое число есть размещение без повторений из 10 цифр по 3, не имеющее первым элементом нуль. Следовательно, **m**=(A10)3–(A9)2=10**.**9**.**8—9**.**8=92**.**8 (из числа всех трёхэлементных размещений без повторений надо вычесть число тех, у которых на первом месте стоит нуль) и P(A\*)=92**.**8/900=0,72. Тогда по

**теореме 2** P(A)=1-P(A\*)=0,28.

**Пример 4.** В урне, содержащей **n** шаров белого, красного и чёрного цвета, находится **k** белых шаров и **L** красных. Какова вероятность вынуть шар не чёрного цвета?

**Решение.** Если событие А состоит в появлении белого, а событие В – красного шара, то появление шара не чёрного цвета означает появление либо белого, либо красного шара. Так как по определению вероятности

**P**(A)=k/n, **P**(B)=L/n,

То по теореме сложения вероятность появления шара не чёрного цвета равна: **P**(A U B)=k/(n+L)/n=(k+L)/n.

Эту задачу можно решить и так. Пусть событие **С** состоит в появлении чёрного шара. Число чёрных шаров равно n –(k+L), так что P(C)=(n—k—L)/n. 3

Появление шара не чёрного цвета является противоположным событием **С\***, поэтому на основании указанного выше следствия из теоремы сложения имеем: P(C\*)=1—P(C )=1—(n—k—L)/n=(k+L)/n, как и раньше.

**Пример 5.** В денежно – вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого – либо выигрыша на один лотерейный билет?

**Решение.** Если обозначить через **А** событие, состоящее в выпадении денежного выигрыша, и через В — вещевого, то из определения вероятности следует **P(A)**=120/1000=0,12; **P(B)**=80/1000=0,08. Интересующее нас событие представляет (AUB), поэтому из теоремы сложения вытекает:

P(AUB)=P(A)+P(B)=0,20.

Таким образом, вероятность какого – либо выигрыша равна 0,2.

Прежде чем перейти к следующей теореме, необходимо ознакомиться с новым важным понятием – понятием **условной вероятности.** Для этой цели мы начнём с рассмотрения следующего примера.

Пусть на складе имеется 400 электрических лампочек, изготовленных на двух различных заводах, причём на первом изготовлено 75% всех лампочек, а на втором – 25%. Допустим, что среди лампочек, изготовленных первым заводом, 83% удовлетворяют условиям определённого стандарта, а для продукции второго завода этот процент равен 63. Определим вероятность того, что случайно взятая со склада лампочка окажется удовлетворяющей условиям стандарта.

Заметим, что общее число имеющихся стандартных лампочек состоит из

400 **.** 0,75 **.** 0,83=249 лампочек, изготовленных первым заводом, и 63 лампочек, изготовленных вторым заводом, т.е. равно 312. Так как выбор любой лампочки следует считать равновозможным, то мы имеем 312 благоприятствующих случаев из 400, так что **P(B)**=312/400=0.78, где событие **В** состоит в том, что выбранная нами лампочка стандартна.

Пир этом подсчёте не делалось никаких предположений о том, к продукции какого завода принадлежит выбранная нами лампочка. Если же какие – либо предположения такого рода сделать, то очевидно, что интересующая нас вероятность может измениться. Так, например, если известно, что выбранная лампочка изготовлена на первом заводе (событие **А**), то вероятность того, что она стандартна, будет уже не 0.78, а 0.83.

Такого рода вероятность, т.е. вероятность события **В** при условии, что имеемт событие **А**, называют условной вероятностью события **В** при условии наступления события **А** и обознаают **РА** **(В)**.

Если мы в предыдущем примере обозначали через **А** событие, состоящее в том, что выбранная лампочка изготовлена на первом заводе, то мы можем написать РА (В)**=**0,83.

Теперь мы можем сформулировать важную теорему, относящуюся к подсчёту вероятности совмещения событий.