МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Факультет психологии валеологии и спорта

**РЕФЕРАТ**

Тема: "Знакомство с топологией"

2009 г.

**План**

Введение

1. Основные этапы развития топологии

2. Общая характеристика топологии

3. Общая топология

4. Топологическое пространство

5. Важные проблемы и результаты

Заключение

Список использованных источников и литературы

**Введение**

Топология – сравнительно молодая математическая наука. Примерно за сто лет ее существования в ней достигнуты результаты, важные для многих разделов математики. Поэтому проникновение в «мир топологии» для начинающего несколько затруднительно, так как требует знания многих фактов геометрии, алгебры, анализа и других разделов математики, а также умения рассуждать.

Топология оказывает влияние на многие разделы математики. Она изучает, в частности, такие свойства произвольных геометрических образов, которые сохраняются при преобразованиях, происходящих без разрывов и склеивания, или, как говорят математики, – при взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях. Такие преобразования называют топологическими. Два геометрических образа в топологии рассматриваются как «одинаковые», если один из них можно перевести в другой топологическим преобразованием. Например, круг и квадрат на плоскости можно преобразовать друг в друга топологическим преобразованием – это топологически эквивалентные фигуры. В то же время круг и кольцевая область, получаемая из круга «выбрасыванием» концентричного круга меньшего радиуса, с точки зрения топологии – различны.

Топология делится на два раздела – общую или теоретико-множественную топологию и алгебраическую топологию. Деление это в значительной мере условно. Одна из основных задач общей топологии – анализ математической концепции непрерывности в ее наиболее общей форме. Для этого было введено понятие топологического пространства. В топологии разработана весьма изощренная алгебраическая и аналитическая техника, значение которой выходит далеко за пределы первоначальной сферы ее применения. Сюда входит, в частности, так называемая гомологическая алгебра, которая является рабочим инструментом также и в теории уравнений с частными производными, в теории функций многих комплексных переменных и т.д. Один из разделов общей топологии – теория размерности. Что значит, что некоторое пространство двумерно, трехмерно или, вообще, n-мерно? Размерность есть одна из фундаментальных характеристик топологического пространства. Определение ее в общем случае оказывается весьма непростым. В. Кузьминовым был построен ряд примеров, показывающих парадоксальность поведения размерности в определенных ситуациях. И. Шведовым изучалась задача об аксиоматическом определении размерностей, и он опроверг, в частности, некоторые известные гипотезы, связанные с этой задачей. Другой раздел топологии носит название теории Ходжа. Эта теория объединяет в себе представления, относящиеся к теории уравнений в частных производных, римановой геометрии и топологии. В. Кузьминовым, И. Шведовым и В. Гольдштейном в серии работ было построено некоторое обобщение теории Ходжа, применимое к изучению многообразий с особенностями и многообразий, удовлетворяющих пониженным (в сравнении с обычной теорией Ходжа) требованиям гладкости. Отличие этой обобщенной теории Ходжа, – с точки зрения дифференциальных уравнений, – в том, что эта теория существенно нелинейно.

**1. Основные этапы развития топологии**

Отдельные результаты топологического характера были получены ещё в 18–19 вв. (теорема Эйлера о выпуклых многогранниках, классификация поверхностей и теорема Жордана о том, что лежащая в плоскости простая замкнутая линия разбивает плоскость на две части).

В начале 20 в. создаётся общее понятие пространства в Топология (метрическое – М. Фреше, топологическое – Ф. Хаусдорф), возникают первоначальные идеи теории размерности и доказываются простейшие теоремы о непрерывных отображениях (А. Лебег, Л. Брауэр), вводятся полиэдры (А. Пуанкаре) и определяются их так называемые числа Бетти.

Первая четверть 20 в. завершается расцветом общей Топология и созданием московской топологической школы; закладываются основы общей теории размерности (П.С. Урысон); аксиоматике топологических пространств придаётся её современный вид (П.С. Александров); строится теория компактных пространств (П.С. Александров, П.С Урысон) и доказывается теорема об их произведении (А.Н. Тихонов); впервые даются необходимые и достаточные условия метризуемости пространства (П.С. Александров, П.С. Урысон); вводится понятие локально конечного покрытия; вводятся вполне регулярные пространства (А.Н. Тихонов); определяется понятие нерва и тем самым основывается общая теория гомологий.

Под влиянием Э. Нётер числа Бетти осознаются как ранги групп гомологий, которые поэтому называются также группами Бетти. Л.С. Понтрягин, основываясь на своей теории характеров, доказывает законы двойственности для замкнутых множеств.

Во 2-й четверти 20 в. продолжается развитие общей Топология и теории гомологий: в развитие идей Тихонова А. Стоун (США) и Э. Чех вводят так называемое стоун – чеховское, или максимальное, (би) компактное расширение вполне регулярного пространства; определяются группы гомологий произвольных пространств, в группы когомологий вводится умножение и строится кольцо когомологий. В это время в алгебраической Топология царят комбинаторные методы, основывающиеся на рассмотрении симплициальных схем; поэтому алгебраическая Топология иногда и до сих пор называется комбинаторной Топология Вводятся пространства близости и равномерные пространства. Начинает интенсивно развиваться теория гомотопий (Х. Хопф, Понтрягин); определяются гомотопические группы (В. Гуревич, США) и для их вычисления применяются соображения гладкой Топология. Формулируются аксиомы групп гомологий и когомологий. Возникает теория расслоений; вводятся клеточные пространства.

Во 2-й половине 20 в. в СССР складывается советская школа общей Топология и теории гомологий: ведутся работы по теории размерности, проблеме метризации, теории (би) компактных расширений, общей теории непрерывных отображений (факторных, открытых, замкнутых), в частности теории абсолютов; теории так называемых кардинальнозначных инвариантов.

Усилиями ряда учёных окончательно складывается теория гомотопий. В это время создаются крупные центры алгебраической Топология в США, Великобритании и др. странах; возобновляется интерес к геометрической Топология Создаётся теория векторных расслоений и К-функтора, алгебраическая Топология получает широкие применения в гладкой Топология и алгебраической геометрии развивается теория (ко) бордизмов и теория сглаживания и триангулируемости.

В настоящее время Топология продолжает развиваться во всех направлениях, а сфера её приложений непрерывно расширяется.

**2. Общая характеристика топологии**

Одним из самых неожиданных явлений в развитии математики XX в. Стал головокружительный взлет науки, известной под названием топология.

Топология (от греч. τόπος – место и λόγος – слово, учение) – раздел геометрии, изучающий в самом общем виде явление непрерывности, в частности свойства пространства, которые остаются неизменными при непрерывных деформациях, например, связность, ориентируемость.

Желая пояснить, что такое топология, иногда говорят, что это «геометрия на резиновой поверхности». Это малопонятное и туманное описание позволяет, тем не менее уловить суть предмета. Топология изучает те свойства геометрических объектов, которые сохраняются при непрерывных преобразованиях. Непрерывные преобразования характеризуются тем, что точки, расположенные «близко одна к другой» до преобразования, остаются такими и после того, как преобразование закончено. При топологических преобразованиях разрешается растягивать и изгибать, но не разрешается ломать и рвать. (однако, с одной оговоркой: когда речь идет о преобразованиях, нас не интересует, что происходит в процессе этих преобразований, важны только начальное положение и конечный результат. Поэтому допускаются, скажем, разрезы по каким-то линиям, которые потом склеиваются по тем же линиям. Например, если шнурок завязан узлом и его концы соединены, можно разрезать его где-то, развязать узел и снова соединить на месте разреза).

Топологию можно подразделить на три области:

1) комбинаторную топологию, изучающую геометрические формы посредством их разбиения на простейшие фигуры, регулярным образом примыкающие друг к другу;

2) алгебраическую топологию, занимающуюся изучением алгебраических структур, связанных с топологическими пространствами, с упором на теорию групп;

3) теоретико-множественную топологию, изучающую множества как скопления точек (в отличие от комбинаторных методов, представляющих объект как объединение более простых объектов) и описывающую множества в терминах таких топологических свойств, как открытость, замкнутость, связность и т.д. Разумеется, такое деление топологии на области в чем-то произвольно; многие топологи предпочитают выделять в ней другие разделы.

Какого рода свойства являются топологическими? Ясно, что не те, которые изучаются в обычной евклидовой геометрии. Прямолинейность не есть топологическое свойство, потому что прямую линию можно изогнуть и она станет волнистой. Треугольник – тоже не является топологическим свойством, ибо треугольник можно непрерывно деформировать в окружность.

Итак, в топологии треугольник и окружность – одно и то же. Длины отрезков, величины углов, площади – все эти понятия изменяются при непрерывных преобразованиях, и о них следует забыть. Очень немногие привычные понятия геометрии годятся для топологии, поэтому приходится искать новые. Этим топология трудна для начинающих, пока они не постигнут сути дела.

Образцом топологического свойства объекта служит наличие дырки у бублика (причем довольно тонкая сторона этого дела – тот факт, что дырка не является частью бублика). Какую бы непрерывную деформацию ни претерпел бублик, дырка останется. Существует крылатая фраза, что тополог (математик, занимающийся топологией) – это человек, не отличающий бублик от чайной чашки. Это означает, что наиболее общие (топологические) свойства бублика и чашки одинаковы (они телесны и имеют одну дырку).

Другое топологическое свойство – наличие края. Поверхность сферы не имеет края, а пустая полусфера имеет, и никакое непрерывное преобразование не в состоянии это изменить.

Основные объекты изучения в топологии называются топологическими пространствами. Интуитивно их можно представлять себе как геометрические фигуры. Математически это – множества (иногда – подмножества евклидова пространства), наделенные дополнительной структурой под названием топология, которая позволяет формализовать понятие непрерывности. Поверхность сферы, бублика (правильнее – тора) или двойного тора – это примеры топологических пространств.

Два топологических пространства топологические эквиваленты, если можно непрерывным образом перейти от одного из них к другому и непрерывным же образом вернуться обратно.

Нам приходится вводить требование непрерывности как прямого отображения, так и обратного к нему, по следующей причине. Возьмем два куска глины и слепим их вместе. Такое преобразование непрерывно, поскольку близкие друг к другу точки останутся таковыми.

Однако при обратном преобразовании один кусок распадается на два, и, следовательно, близкие точки по разные стороны от линии раздела окажутся далеко друг от друга, т.е. обратное преобразование не будет непрерывным. Такие преобразования нам не подходят.

Геометрические фигуры, переходящие одна в другую при топологических преобразованиях, называются гомеоморфными. Окружность и граница квадрата гомеоморфны, так как их можно перевести друг в друга топологическим преобразованием (т.е. изгибанием и растяжением без разрывов и склеиваний, например, растяжением границы квадрата на описанную вокруг него окружность). Сфера и поверхность куба также гомеоморфны. Чтобы доказать гомеоморфность фигур, достаточно указать соответствующее преобразование, но тот факт, что для каких-то фигур найти преобразование нам не удается, не доказывает, что эти фигуры не гомеоморфны. Здесь помогают топологические свойства.

**3. Общая топология**

Особое место среди областей топологии занимает общая топология. В настоящее время общая топология достигла того наиболее естественного уровня общности, который позволяет излагать топологические принципы, концепции и конструкции с наибольшей прозрачностью и одновременно обеспечить им максимально широкую приложимость в других разделах математики.

Общая топология – это область математики, в которой изучаются общие геометрические свойства, сохраняющиеся при непрерывных и взаимно однозначных отображениях.

Наряду с алгеброй общая Топология составляет основу современного теоретико-множественного метода в математике.

Аксиоматически определяемыми объектами изучения общей топологии являются пространства и их непрерывные отображения. Под топологическим пространством понимается множество объектов произвольной природы, называемых точками, в котором выделена некоторая система подмножеств, называемых открытыми множествами пространства. Эта система должна включать в себя всё пространство и пустое множество и содержать в себе вместе с любыми двумя множествами их пересечение и вместе с любым набором множеств множество, которое является их объединением.

Существенное влияние на развитие общей топологии оказало введённое П.С. Александровым понятие бикомпактности. Александров и Урысон создали теорию бикомпактных пространств. Бикомпактные пространства – один из главных объектов исследования в общей топологии – и в настоящее время находятся в центре внимания математиков. Они играют важную роль в теории размерности, теории гомологий и других разделах топологии, а также имеют основное значение в функциональном анализе. Всякое вполне регулярное пространство является подмножеством некоторого бикомпактного хаусдорфова пространства.

В настоящее время наиболее распространённым является следующее определение бикомпактного пространства: пространство называется бикомпактным, если из всякого открытого покрытия этого пространства можно выбрать конечное число покрывающих множеств.

В литературе можно встретить и другие классы пространств, родственные бикомпактным, например псевдокомпактные, квазикомпактные. Бикомпактные пространства занимают главное место среди них и играют такую же роль в общей топологии, как компакты в классе метризуемых пространств.

Кроме того общая топология посвящена изучению понятий непрерывности, а также других понятий, таких как компактность или отделимость, как таковых, без обращения к другим инструментам.

**4. Топологическое пространство**

Топологическое пространство – основной объект изучения топологии. Понятие топологического пространства можно рассматривать как обобщение понятия геометрической фигуры, в котором мы отвлекаемся от свойств наподобие размера или точного положения частей фигуры в пространстве, и сосредотачиваемся только на взаимном расположении частей. Топологические пространства возникают естественно почти во всех разделах математики.

Итак, топологическое пространство определяется через систему открытых множеств посредством аксиом. Естественно, само это понятие базируется на предварительных общих понятиях «пространство» и «открытое множество».

В современной математике пространство определяют как некоторое абстрактное множество произвольных объектов, для которых задана определённая операция, осуществляющая известное отношение между элементами пространства. Базой для построения теории того или иного абстрактного пространства является, с одной стороны, общематематическое понятие множества, под которым понимается произвольная совокупность любых объектов (элементов), а с другой, – установленные определённым образом структурные отношения между этими объектами.

Пусть дано множество X. Множество T его подмножеств называется топологией на X, если выполнены следующие свойства:

* Все X и пустое множество принадлежат T,
* Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T,
* Пересечение двух множеств, принадлежащих T, принадлежит T.

Множество X вместе с заданной на нем топологией T называется топологическим пространством. Подмножества X, принадлежащие T, называются открытыми множествами.

Потребность в развитии общего подхода к понятию пространства возникла довольно давно – в конце прошлого и начале нынешнего столетия. В связи с развитием теории функций действительного переменного и функционального анализа возникли и другие объекты – функциональные пространства и их подмножества, – для исследования которых также требуются понятия и методы общей топологии.

В настоящее время топологические методы исследования применяются не только в анализе, но и во многих других отраслях математики. Значительной является роль топологических методов в дифференциальных уравнениях. В результате синтеза идей общей топологии и функционального анализа возникла теория топологических векторных пространств. Абстрактные топологические пространства неожиданным образом могут возникать и применяться в самых различных областях математики.

Общепринятое ныне понятие топологического пространства возникло не сразу. Появившееся ранее метрические пространства, которые и по сей день являются важным предметом изучения общей топологии, не могли удовлетворить математиков.

Первые достаточно общие определения топологического пространства даны в работах Фреше, Рисса и Хаусдорфа. Окончательно определение топологического пространства было сформулировано польским математиком К. Куратовским и П.С. Александровым.

**5. Важные проблемы и результаты**

Теорема Жордана о замкнутой кривой. Если на поверхности проведена простая замкнутая кривая, то существует ли какое-либо свойство кривой, которое сохраняется при деформации поверхности? Существование такого свойства вытекает из следующей теоремы: простая замкнутая кривая на плоскости делит плоскость на две области, внутреннюю и внешнюю. Эта кажущаяся тривиальной теорема очевидна для кривых простого вида, например, для окружности; однако для сложных замкнутых ломаных дело обстоит иначе. Теорема была впервые сформулирована и доказана К. Жорданом (1838–1922); однако доказательство Жордана оказалось ошибочным. Удовлетворительное доказательство было предложено О. Вебленом (1880–1960) в 1905.

Теорема Брауэра о неподвижной точке. Пусть D – замкнутая область, состоящая из окружности и ее внутренности. Теорема Брауэра утверждает, что для любого непрерывного преобразования, переводящего каждую точку области D в точку этой же области, существует некоторая точка, которая остается неподвижной при этом преобразовании. (Преобразование не предполагается взаимно однозначным.) Теорема Брауэра о неподвижной точке представляет особый интерес потому, что она, по-видимому, является, наиболее часто используемой в других разделах математики топологической теоремой.

Проблема четырех красок. Проблема заключается в следующем: можно ли любую карту раскрасить в четыре цвета так, чтобы любые две страны, имеющие общую границу, были раскрашены в различные цвета? Проблема четырех красок топологическая, так как ни форма стран, ни конфигурация границ не имеют значения.

Гипотеза о том, что четырех красок достаточно для соответствующей раскраски любой карты, была впервые высказана в 1852. Опыт показал, что четырех красок действительно достаточно, но строгого математического доказательства не удавалось получить на протяжении более ста лет. И только в 1976 К. Аппель и В. Хакен из Иллинойского университета, затратив более 1000 часов компьютерного времени, добились успеха.

Односторонние поверхности. Простейшей односторонней поверхностью является лист Мёбиуса, названный так в честь А. Мёбиуса, открывшего его необычайные топологические свойства в 1858. Пусть ABCD (рис. 2, а) – прямоугольная полоска бумаги. Если склеить точку A с точкой B, а точку C с точкой D (рис. 2, б), то получится кольцо с внутренней поверхностью, наружной поверхностью и двумя краями. Одну сторону кольца (рис. 2, б) можно окрасить. Окрашенная поверхность будет ограничена краями кольца. Жук может совершить «кругосветное путешествие» по кольцу, оставаясь либо на окрашенной, либо на неокрашенной поверхности. Но если полоску перед склеиванием концов перекрутить на пол-оборота и склеить точку A с точкой C, а B с D, то получится лист Мёбиуса (рис. 2, в). У этой фигуры есть только одна поверхность и один край. Любая попытка окрасить только одну сторону листа Мёбиуса обречена на неудачу, так как у листа Мёбиуса всего одна сторона. Жук, ползущий по середине листа Мёбиуса (не пересекая края), вернется в исходную точку в положении «вверх ногами». При разрезании листа Мёбиуса по средней линии он не распадается на две части.

Узлы. Узел можно представлять себе как запутанный кусок тонкой веревки с соединенными концами, расположенный в пространстве. Простейший пример – из куска веревки сделать петлю, пропустить один из ее концов сквозь петлю и соединить концы. В результате мы получим замкнутую кривую, которая остается топологически той же самой, как бы ее ни растягивать или скручивать, не разрывая и не склеивая при этом отдельные точки. Проблема классификации узлов по системе топологических инвариантов пока не решена.

**Заключение**

Топология – очень красивая наука. Она осуществляет связь геометрии с алгеброй. Ее идеи и образы играют ключевую роль практически во всей современной математике – в дифференциальных уравнениях, механике, комплексном анализе, алгебраической геометрии, функциональном анализе, математической и квантовой физике, теории представлений, и даже – в удивительно преображенном виде – в теории чисел, комбинаторике и теории сложности вычислений. В частности, современная топология находит широкое применение в механике и математической физике. Топологические методы широко используются в качественной теории движения твердого тела.

**Список использованных источников и литературы**

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973
2. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961
3. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука 1968
4. Телеман К. Элементы топологии и дифференцируемые многообразия. М.: Мир, 1967
5. Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973
6. Стюарт Я. Топология // Квант – 1992. – №7.