**Основные определения и теоремы к зачету по функциональному анализу**

Определение: Элемент наилучшего приближения – L – линейное многообразие, плотное в E. ∀ε ∀x∈E ∃u: ║x-u║<ε

Теорема: Для любого элемента нормированного пространства существует хотя бы один элемент наилучшего приближения из конечномерного подпространства.

Теорема: Для элемента из строго нормированного конечномерного пространства существует единственный элемент наилучшего приближения из конечномерного подпространства.

Теорема: Рисса о существовании почти ортогонального элемента. E-НП L⊂E, ∀ε∈(0,1) ∃zε∈E\L ║zε║=1 ρ(zε,L)>1-ε

Определение: Полное нормированное пространство- любая фундаментальная последовательность сходиться.

Теорема: О пополнении нормированного пространства. Любое нормированное пространство можно считать линейным многообразием, плотным в некотором полном нормированном пространстве.

Определение: Гильбертово пространство – нормированное пространство, полное в норме, порожденной скалярным произведением.

Теорема: Для любого элемента гильбертова пространства существует единственный элемент наилучшего приближения в конечномерном подпространстве гильбертова пространства.

Определение: L плотное в E, если ∀x∈E ∃u∈L: ║x-u║<ε

Теорема: Чтобы L было плотно в H ⬄ ортогональное дополнение к L состояло только из нулевого элемента.

Определение: Сепарабельное – нормированное пространство, содержащее некоторое счетное плотное в нем множество.

Определение: Ортогональное дополнение – множество элементов ортогональных к элементам данного пространства.

Определение: Линейный оператор – отображение, для которого A(ax+by)=aAx+bAy

Определение: Непрерывный оператор – Ax🡪Ax0 при x🡪 x0

Определение: (X,Y) – пространство линейных операторов

Теорема: Пусть X и Y – полные НП и A – непрерывен на некотором подпространстве пространства X, тогда он непрерывен на всем X.

Определение: Ограниченный оператор - ∀║x║≤1 ∃с: ║Ax║≤c

Теорема: A – ограниченный ⬄ ∀x∈X ║Ax║≤c║x║

Теорема: Для того чтобы А был непрерывен ⬄ чтобы он была ограничен

Теорема: {An} равномерно ограничена 🡺 {An}- ограничена.

Теорема: {Anx} – ограниченно ⬄ {║An║}- ограничена.

Определение: Сильная (равномерная) сходимость ║An-A║🡪0, n🡪∞, обозначают An🡪A

Определение: Слабая сходимость - ∀x∈X ║(An-A)x║Y🡪0, n🡪∞

Теорема: Для того, чтобы имела место сильная сходимость ⬄ {An} сходилась равномерно на замкнутом шаре радиуса 1

Теорема: Банаха-Штенгауза An🡪A n🡪∞ слабо 🡺 1) {║An║}- ограничена 2) An🡪A, x’⊂X, x’=x

Теорема: Хана Банаха. A:D(A)🡪Y, D(A)⊂X 🡺 ∃ A’:X🡪Y 1) A’x=Ax, x∈D(A) 2) ║A’║=║A║

Определение: Равномерная ограниченность - ∃a ∀x: ║x(t)║≤a

Определение: Равностепенная непрерывность ∀t1,t2 ∃δ: ║x(t1)-x(t2)║<ε

Теорема: (X,Y) полное, если Y – полное.

Определение: Ядро – {x∈X | Ax=0}

Определение: Сопряженное пространство – пространство функционалов X\*:=(X,E)

Определение: Сопряженный оператор A\*: Y\*🡪X\*

Теорема: Банаха A:X🡪Y и X,Y- полные нормированные пространства. Тогда ∃ A-1 и ограничен.

Определение: Оператор А – обратимый

Определение: Оператор А- непрерывнообратимый если 1) A- обратим, 2) R(A)=Y, 3) A-1-ограничен.

Теорема: A-1 ∃ и ограничен ⬄ ∃m>0 ∀x∈X ║Ax║≥m║x║

Теорема: Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве. Пусть f:X🡪Y – линейный ограниченный функционал 🡺 ∃! y∈H ∀x∈H f(x)=(x,y)

Определение: M⊂X называется бикомпактным, если из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся к элементам этого же множества последовательность.

Определение: Множество называется компактным, если любая ограниченная последовательность элементов содержит фундаментальную подпоследовательность.

Теорема: Хаусдорфа. M⊂X компактно ⬄ ∀ε>0 ∃ конечная ε-сеть

Теорема: Арцела. M⊂C[a,b] компактно ⬄ все элементы множества равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

Определение: Компактный (вполне непрерывный) оператор – замкнутый шар пространства X переводит в замкнутый шар пространства Y.

Определение: σ(X,Y) – подпространство компактных операторов

Теорема: Шаудера. A∈σ(X,Y) ⬄ A\*∈σ(X\*,Y\*)

Линейные нормированные пространства

1. Пространства векторов

  сферическая норма

  кубическая норма

  ромбическая норма

  p>1

1. Пространства последовательностей 

   p>1

 или  пространство ограниченных последовательностей



 пространство последовательностей, сходящихся к нулю



 пространство сходящихся последовательностей



1. Пространства функций

 пространство непрерывных на  функций



 пространство k раз непрерывно дифференцируемых на  функций



£p[a,b] пространство функций, интегрируемых в степени p (не Гильбертово)

 - пополнение £p[a,b] (Гильбертово)

 

Неравенство Гёльдера  p,q>0

Неравенство Минковского 