**Высшая математика**

(шпаргалка)

Осн. понятия

*Грани числовых мн-в*

Числовые последовательности

Непр. ф-ции на пр-ке

1. Осн. понятия

*Мат.модель* – любой набор кр-ний; неравенств и иных мат. Соотношений, которая в совокупности описывает интересующий нас объект.

Мн-во вещест. чисел разбивается: на рационал. и иррац. *Рац.* – число, которое можно представить в виде p/q где p и q – цел. числа. *Иррац*. – всякое вещественное число, которое не явл. рационал.

Любое вещ. число можно представить в виде бесконеч. десят. Дроби а, а1,а2…аn… где а –люб. число, а а1, а2 … аn числа, приним. целые знач.

Некоторые числовые множества.

*Мн-ва* – первичное понятие, на уровне здравого смысла, его не возможно точно определить.

Для описания мн-в единая символика, а именно, если в мн-во А входят только эл. х, которые обладают некоторым св-вом S(x), то тогда мн-во А описывается А={х⏐ вып-ся усл S(x)}.

*Подмн-ва* – если А и В 2 мн-ва и все эл-ты мн-ва А сод-ся в В, то А наз-ся подмн-вом В, А В, если в В сод-ся эл-ты отличные от эл-тов мн-ва А, то В строго шире А, то А наз-ся собственным подмн-вом В. А⊂В. А=В- мн-ва совпадают.

*Операции с мн*-*воми* А В={х!х принадл. либо А, либо В} – обьединение мн-в А и В.

А∩ В={х⏐х∈А и х∈В} пересечение мн-в А и В.

А\ В={х⏐х∈А, но х∉В}дополн. к м-ву В во мн-ве А

Числовые мн-ва

*R,N,Z,Q - стандартные обозначения мн-в на числ. прямой. (а,в)= {х⏐а<х<в} – интервал из R (открытый промежуток, т.к. не содержит границ)*

*[а,в] – замкнутый промежуток сод. гранич. т-ки.*

*(а,в] – полуинтервал.*

Окрестностью т-ки х наз-ся любой интервал содержащий т-ку х, необязательно симметричную.

*2. Грани числовых мн-в*

*Пусть Х – непустое мн-во веществ. чисел.*

Мн-во Х назся огран*. сверху(снизу), если сущ-ет число с такое, что для любого х Х вып-ся неравенство с≥х(х≥с). Число с наз-ся верхн.(нижн.) гранью мн-ва Х. Мн-во, огран. сверху и снизу наз-ся* ограниченым

*Если мн-во имеет 1 верхнюю грань то она имеет их бесчисленное мн-во.*

*Пример* X=R+ - ограничено снизу, но не сверху, значит не ограничено.

*Точные грани числовых мн-в*

*Пусть мн-во Х ограничено сверху, если это мн-во содержит макс число, т.е. наименьшую из своих верхних граней, то это число назся макс мн-ва Х и обозначается Х\*=maxX. Если мн-во содержит мин число Х\* , то оно min мн-ва Х*

Пример *Х=[0,1) то max[0,1) не ∃. min [0,1)=0*

Число Х\* наз-ся точной верхн*. гранью, мн-ва Х, если во-первых оно явл. верхн. гранью этого мн-ва, а во-вторых при сколь угодном уменьшении Х\* получ. число перестает быть верх. гранью мн-ва.*

*Верхн. грань – supX=x\*, а нижн. грань infX=x\**

*Теорема.* Любое непустое ограниченное сверху (снизу) числ. мн-во имеет точную верх(ниж) грань.

Таким образом у огран. мн-ва обе грани ∃, док-во основано на непрерывности мн-ва действит. чисел.

3. Числовые последовательности

Если для каждого нат. числа n определено некоторое правило сопоставляющее ему число xn, то мн-во чисел х1,х2, … ,хn, … наз-ся числовой последовательностью и обозначается {xn}, причем числа образующие данную посл-ть наз-ся ее эл-ми, а эл-т хn общим эл-том посл-ти .

!Порядок следования эл-тов оч. важен, перестановка хотя бы 2-х эл-тов приводит к др. посл-ти.

*Основные способы задан. посл-ти:*

а) явный, когда предъявляется ф-ла позволяющая по заданному n вычислить любой эл-т n, т.е. xn=f(n), где f- некоторая ф-ция нат. эл-та.

б) неявный, при котором задается некоторое рекуррентное отношение и несколько первых членов посл-ти.

*Пример:*

а) xn=5n x1=5, x2=10

б) x1=-2 xn=4n-1 –3, n=2,3… х2=-11, х3=-47

Ограниченные последовательности(ОП)

*Посл-ть {xn} наз-ся огран.* сверху(снизу), если найдется какое-нибудь число {xn} M(m) xn≤M ∀n (xn≥m ∀n) посл-ть наз-ся огранич., если она огранич. сверху и снизу.

*Посл-ть {xn} наз-ся неогранич*., если для любого полного числа А сущ-ет эл-т хn этой посл-ти, удовлетворяющий неравенству ⏐xn⏐>А.

Сходящиеся и расходящиеся посл-ти

Св-ва сходящихся посл-тей

*Теорема «Об единственности пределов»*

Теорема «Сходящаяся посл-ть ограничена»

Теорема «О сходимости монотон. посл-ти»

4. Сходящиеся и расходящиеся посл-ти

Большое внимание уд-ся выяснению вопроса: обладает ли данная посл-ть сл-щим св-вом (сходимости) при неогранич. Возрастании номеров посл-ти эл-ты посл-ти сколь угодно близко приближаются к некоторому числу а или же этого св-ва нет.

Опр *Если для любого ε >0 найдется такой номер N, для любого n >N:⏐xn-a⏐< ε*

Все посл-ти имеющие предел наз-ся *сходящимися*, а не имеющее его наз-ся *расходящимися.*

Связь сходящихся посл-тей и б/м.

Дает сл. теорему

*Теорема* Для того чтобы посл-ть xn имела пределом число а необходимо, чтобы эл-ты этой посл-ти можно было представить в виде xn=a+αn, где посл-ть {αn}→0, т.е. *является б/м.*

*Док-во*

а) Допустим, что xn→a и укажем посл-ть αn удовл. равенству xn=a+αn. Для этого просто положим αn=xn-a, тогда при n→∞⏐xn-a⏐ равно растоянию от xn до а → 0 => αn б/м и из равенства преобразования определяю αn получаем xn=a+αn.

Свойство б/м

Если {xn},{yn}- любые посл-ти, то их сумма {xn+yn}, это есть пос-ть с общим членом xn+yn. Аналогично с разностью, частным и умножением.

Т-ма о св-вах б/м

а) {xn}и{yn}-б/м пос-ти, б/м

1) их сумма, разность и произведение являются б/м

2) Произведение любой огранич. посл-ти на б/м являются б/м

!О частном не говорят, т.е. частное б/м может не быть б/м.

Посл-ть {xn} явл. б/б, если для любого числа с>0 сущ-ет номер N для всех номеров n>N ⏐xn⏐>c.

!Понятие б/б не совпадает с неограниченной: посл-ть может быть неогранич., но не является б/б.

Пример *1,1/2,3,1/4,5,1/6,7… явл. неогранич., т.е. принимает сколь угодно большие по модулю значения, однако в ней имеются эл-ты со сколь угодно большими номерами принимающие дробные знач. и сколь угодно малые по модулю.*

Св-ва сходящихся посл-тей

Теорема «Об единственности пределов»

Если посл-ть xn сходится, то она имеет единственный предел.

*Док-во (от противного)*

{xn} имеет два разл. Предела a и b, а≠b. Тогда согласно определению пределов любая из окрестностей т. а содержит все эл-ты посл-ти xn за исключением конечного числа и аналогичным св-вом обладает любая окрестность в точке b. Возьмем два радиуса ε= (b-a)/2, т.к. эти окрестности не пересекаются, то одновременно они не могут содержать все эл-ты начиная с некоторого номера. Получим противоречие теор. док-на.

Теорема «Сходящаяся посл-ть ограничена»

 Пусть посл-ть {xn}→а ε >о N:∀n>N⏐xn-a⏐<ε эквивалентна а-ε<xn<a+ε ∀n>N => что каждый из членов посл-ти удовлетворяет неравенству⏐xn⏐≤ c = max {⏐a-ε⏐,⏐a+ε⏐,⏐xn⏐,…,⏐xn-1⏐}

Теорема «Об арифметических дейсьвиях»

Пусть посл-ть {xn}→a,{yn}→b тогда арифметические операции с этими посл-тями приводят к посл-тям также имеющие пределы, причем:

а) предел lim(n→∞)(xn±yn)=a±b

б) предел lim(n→∞)(xn\*yn)=a\*b

в) предел lim(n→∞)(xn/yn)=a/b, b≠0

*Док-во:*

а)xn±yn=(а+αn)±(b+βn)=(a±b)+(αn±βn) Правая часть полученная в разности представляет сумму числа a+b б/м посл-тью, поэтому стоящая в левой части xn+yn имеет предел равный a±b. Аналогично др. св-ва.

б) xn\*yn=(а+αn)\*(b+βn)=ab+αnb+aβn+αnβn

αn\*b – это произведение const на б/м

а\*βn→0, αnβn→0, как произведение б/м.

=> поэтому в правой части стоит сумма числа а\*b+ б/м посл-ть. По т-ме О связи сходящихся посл-тей в б/м посл-ти в правой части xn\*yn сводится к a\*b

Практический вывод *состоит в том, что нахожд. пределов посл-тей заданных сл. выражениями можно сводить к более простым задачам вычисления lim от составляющих этого выр-ния*

Посл-ть {xn} наз-ся возр., если x1<…<xn<xn+1<…;

неубывающей, если x1≤x2≤…≤xn≤xn+1≤…; убывающей, если x1>x2>…>xn>xn+1>…; невозр., если x1≥x2≥…≥xn≥xn+1≥…

Все такие посл-ти наз-ся *монотонными*. Возр. и убыв. наз-ся *строго монотонными*

*Монотонные посл-ти ограничены с одной стороны, по крайней мере. Неубывающие ограничены снизу, например 1 членом, а не возрастыющие ограничены сверху.*

Теорема «О сходимости монотон. посл-ти»

Всякая монотонная посл-ть явл-ся сходящейся, т.е. имеет пределы.

*Док-во* Пусть посл-ть {xn} монотонно возр. и ограничена сверху. X – все мн-во чисел которое принимает эл-т этой посл-ти согласно усл. Теоремы это мн-во огранич., поэтому по соотв. Теореме оно имеет конечную точную верх. грань supX xn→supX (обозначим supX через х\*). Т.к. х\* точная верх. грань, то xn≤x\* ∀ n. ∀ ε >0 вып-ся нер-во ∃ xm(пусть m- это n с крышкой):xm>x\*-ε при ∀ n>m => из указанных 2-х неравенств получаем второе неравенство x\*-ε≤xn≤x\*+ε при n>m эквивалентно ⏐xn-x\*⏐<ε при n>m. Это означает, что x\* явл. пределом посл-ти.

Экспонента или число е

Ф-ции одной переменной

Обратные ф-ции

6. Экспонента или число е

Р-рим числ. посл-ть с общим членом xn=(1+1/n)^n (в степени n)(1) . Оказывается, что посл-ть (1) монотонно возр-ет, ограничена сверху и сл-но явл-ся сходящейся, предел этой пос-ти наз-ся экспонентой и обозначается символом е≈2,7128…

*Док-ть сходимость посл-ти (1)*

Для док-ва введем вспом-ю ф-цию y=(1+x)^1/x, x>0 Ясно что при знач. x=1,1/2,1/3,…,1/n,… значение ф-ции y совпадает с соответствующими эл-ми (1).

Док-м что ф-ция у монотонно убывает и огран. сверху => монотонное возр. посл-ти (1) и ограниченность ее сверх. Поскольку lg x явл-ся монотонно возр., но монотонное убыв. ф-ции у и ее огранич. сверху эквивалентны том, что ф-ция lgy, которая равняется 1/хlg(1+x) (2) имеет те же самые св-ва, т.е. 0<x1<x2, то тогда 1/x1\*lg(1+x1)>1/x2\* \*lg(1+x2) (3). Огранич. сверху ∃ M:1/xlg(1+x)≤lgM ∀x>0 (4). Возьмем любую лин. ф-цию вида y=kx которая превосходит lg(1+x) при всех x>0.

tgα1=(lg(1+x1))/x1 α1>α2=>tgα1>tgα2

tgα2=(lg(1+x2))/x2

Поскольку α1>α2, то tgα1>tgα2, а это равносильно равенству (3). Поскольку y>lg(1+x) ∀x>0 => kx>

>lg(1+x) ∀x>0

Принимая во внимания ф-ции у с пос-ть xn приходим к нужному утверждению. Число е явл-ся неизбежным спутником динамических процессов: почти всегда показатели изменяющиеся во времени характеризующие такие процессы зависят от времени через экспонициальную ф-цию y=e^x и ее модификации.

Пр-р: если ставка сл-ных % равна r и инвестор положил в банк первоначальный вклад равный Р причем % начисляются m раз в год (r- годовая ставка) тогда через n- лет наращенная сумма нач-ся по ф-ле сл. % при m кратном их начислению.

Sn=P(1+r/m)^mn (5) Предположим теперь % нач-ся непрерывным образом, т.е. число периодов нач-ния неограничено ув-ся. Мат-ки это соотв-ет тому, что выражение (5) надо р-равать, как общий член посл-ти Xm, а непрерывному нач-нию соот-ет наращенная ф-ция lim(n→∞)P(1+r/m)^mn=Pe^rn

Lg(e)x имеет спец. Обозначение lnx.

*Принцип вложенных отрезков*

Пусть на числовой прямой задана посл-ть отрезков [a1,b1],[a2,b2],…,[an,bn],…

Причем эти отрезки удовл-ют сл. усл.:

1) каждый посл-щий вложен в предыдущий, т.е. [an+1,bn+1]⊂[an,bn], ∀n=1,2,…;

2) Длины отрезков →0 с ростом n, т.е. lim(n→∞)(bn-an)=0. Посл-ть с указанными св-вами наз-ют вложенными.

*Теорема*  Любая посл-ть вложенных отрезков содержит единную т-ку с принадлежащую всем отрезкам посл-ти одновременно, с общая точка всех отрезков к которой они стягиваются.

*Док-во*  {an}-посл-ть левых концов отрезков явл. монотонно не убывающей и ограниченной сверху числом b1.

{bn}-посл-ть правых концов монотонно не возрастающей, поэтому эти посл-ти явл. сходящимися, т.е. сущ-ют числа с1=lim(n→∞)an и с2=lim(n→∞)bn => c1=c2 => c - их общее значение. Действительно имеет предел lim(n→∞)(bn-an)= lim(n→∞)(bn)- lim(n→∞)(an) в силу условия 2) o= lim(n→∞)(bn-an)=с2-с1=> с1=с2=с

Ясно что т. с общая для всех отрезков, поскольку ∀n an≤c≤bn. Теперь докажем что она одна.

Допустим что ∃ другая с‘ к которой стягиваются все отрезки. Если взять любые не пересекающиеся отрезки с и с‘, то с одной стороны весь «хвост» посл-тей {an},{bn} должен нах-ся в окрестностях т-ки с‘‘(т.к. an и bn сходятся к с и с‘ одновременно). Противоречие док-ет т-му.

Принцип вложенных отрезков

*Т-ма*. Любая пос-ть вложенных отрезков содержит единств. т-ку с∈всем отрезкам посл-ти одновременно, к которой они стягиваются.

*Док*-*во*. {an} пос-ть левых концов явл. монотонно неубыв. И огран. свеху числом b1; посл-ть правых концов {bn} монотонно не возр. и ограничена снизу а1, поэтому эти посл-ти сходящ., т.е. ∃ числа c1=lim(n→∞)an и c2=lim(n→∞)bn.

*Докажем* что с1=с2 и сл-но их общая знач. может обозначить через с. Действ. имеется предел lim(n→∞)(bn-an)= lim(n→∞)bn→ lim(n→∞)an=c2-c1=c ясно что с общая для всех отрезков поскольку для ∀ n an≤c≤bn. Осталось доказать единство данной т-ки (от противного). Допустим есть c‘≠c к которой стягиваются все отрезки. Если взять любые пределы окр. точек с и с‘, то с одной стороны весь «хвост» {an}, {bn}, должен нах-ся в окрестности т-ки с, а др. в с‘, т.к. an и bn→ c и c‘ одновр. Противореч. док-ет т-му.

7.Ф-ции одной переменной

Если задано правило по которому каждому значению перем. Величины х из мн-ва Х ставится соответствие 1 значению перем. У то в этом случае говорят, что задана ф-ция 1-й переменной.

Y=f(x); x –аргумент независ. перемен., y- зав. пер.

X=Df=D(f) y={y;y=f(x),x∈X} x1∈X1, y1=f(x1)

1) аналит. способ; 2)Табличный способ;

3) Графический способ;

4)Min и max ф-ции: ф-ция f(x) ограничена, если огран. ее мн-во знач У, т.е. ∃ m,M: m≤f(x)≤M ∀x∈X

m≤f(x) ∀x∈X => огр. сн.; f(x)≤M, ∀x∈X=> огр. св.

Обратные ф-ции

Если задано правило по которому каждому значению y∈Y ставится в соответствие → ед. знач. х, причем y=f(x), то в этом случае говорят, что на мн-ве Y определена ф-ция обратная ф-ции f(x) и обозначают такую ф-цию x=f^-1(y).

Предел ф-ции в точке

Свойства предела ф-ции в точке

*Односторонние пределы ф-ции в т-ке:*

Предел ф-ции в т-ке

Предел и непрерывность функции

Предел. Односторонний предел.

Предел ф-ции в точке

y=f(x) X

опр. ∀ {xn} ⊂X, xn→x0

f(xn)→A,=> f(x) в т. x0 (при , xn→x0) предел = А

А=lim(x→x0)f(x) или f(x)→A при x→x0

Т-ка x0 может ∈ и ∉ мн-ву Х.

Свойства предела ф-ции в точке

1) Если предел в т-ке сущ-ет, то он единственный

2) Если в тке х0 предел ф-ции f(x) lim(x→x0)f(x)=A

lim(x→x0)g(x)≤B=> то тогда в этой т-ке ∃ предел суммы, разности, произведения и частного. Отделение этих 2-х ф-ций.

а) lim(x→x0)(f(x)±g(x))=A±B

б) lim(x→x0)(f(x)\*g(x))=A\*B

в) lim(x→x0)(f(x):g(x))=A/B

г) lim(x→x0)C=C

д) lim(x→x0)C\*f(x)=C\*A

Док-во xn→x0, ∃ lim(x→x0)f(x)=A по опр. f(xn)→A {f(xn)}

*Односторонние пределы ф-ции в т-ке:*

*Опр. А - предел ф-ции f(x) справа от точки х0, если f(x)→A при х→х0, и x>x0*

*Формально это означает, что для любой посл-ти {xn}→x0, вып-ся условие xn>x0, f(x)→A. Обозначим f(x0+0) и f(x0+) lim(x→x0+0)f(x)→*

*И также с минусами.*

*Признак ∃ предела*

Т-ма *Для того чтобы f(x) имела предел в т-ке х0 необх., тогда в этой т-ке ф-ция f имеет совпадающ. Между собой одностор. предел* *(f(x0+)=f(x0-) (1), которые равны пределу ф-ции.*

Док-во. *f(x) имеет в т-ке х0 предел А, тогда f(x)→A независимо от того приближается ли х к х0 по значению больше х0 или меньше это означает равенство (1)*

*Предел ф-ции в т-ке*

*Число А наз-ся пределом ф-ции в т-ке х0 если ∀ε>0 найдется такое число В>0, для всех х отличных от х0 и (х-х0)<0 должно ⏐f(x)-A⏐<ε*

*∀ ε >0 из ⏐х-х0⏐<δ должно быть*

*Пусть ⏐f(x)-x0⏐<ε, если δ=ε, то ⏐х-х0⏐<δ => ⏐f(x)-x0⏐<ε*

*Свойства пределов. Непрерывность ф-ции.*

 *Ф-ция f(x) непрерывна в т-ке х0 если предельное значение в этой т-ке равно самому знач. в этой точке.*

Предел и непрерывность функции

Пусть ф-ция f(x) определена на некотором пр-ке Х\* и пусть точка х0∈Х или х0∉Х.

Опр. Число А наз-ся пределом ф-ции f(x) в точке х=х0, если для ∀ ε>0 ∃ δ>0 такое, что для всех х∈Х, х≠х0, удовлетвор. неравенству ⏐х-х0⏐<ε, выполняется неравенство ⏐f(x)-A⏐<ε.

*Пример* Используя определение, док-ть что ф-ция f(x)=C(C-некоторое число) в точке х=х0(х0-любое число) имеет предел, равный С, т.е. lim (x→x0)C=C

Возьмем любое ε>0. Тогда для любого числа δ>0 выполняется треюуемое неравенство ⏐f(x)-C⏐=⏐C-C⏐=0<ε, => lim(x→x0)C=C

Свойства пределов. Непрерывность ф-ции.

*Теорема*. Пусть ф-ции f(x) и g(x) имеют в т-ке х0 пределы В и С. Тогда ф-ции f(x)±g(x),f(x)g(x) и f(x)/g(x) (при С≠0) имеют в т-ке х0 пределы, равные соответственно В±С, В\*С, В/С, т.е. lim[f(x)±g(x)]= B±C, lim[f(x)\*g(x)]= B\*C, lim[f(x)/g(x)]= B/C

Теорема также верна если х0 явл. +∞, −∞, ∞

*Опр*. Ф-ция f(x) наз-ся непрерыной в точке х=х0, если предел ф-ции и ее значение в этой точке равны, т.е. lim(x→x0)f(x)=f(x0)

*Теорема* Пусть ф-ции f(x) и g(x) непрерывны в т-ке х0. Тогда ф-ции f(x)±g(x), f(x)\*g(x) и f(x)/g(x) также непрерывны в этой т-ке.

10. Предел. Односторонний предел.

*Опр.*Числом А наз-ся предел f(x) в т-ке х0, если для любой окрестности А∃ окрестность (х0):∀x∈окрестности (x0) выполняется условие f(x)∈окрестности.

*Теорема* Все определения предела эквивалентны между собой.

*Опр*. Число А называется пределом ф-ции f(x) справа от т.х0(правым предело f(x0)) если f(x)→A при х→х0, х>x0

Формально это означает, что для любой посл-ти сходящейся к х0 при xn>x0 выполняется условие f(xn)→A

*Запись*: f(x0+o), f(x0+ ). lim(x→x0+o)f(x) где запись x→x0+o как раз означает стремление к х0 по мн-ву значений >чем х0.

*Опр*. Предел слева аналогично и исп-ся запись f(x0-o);f(x0-)

*Теорема*. Для того чтобы ф-ция f(x) имела предел в точке х0 необходимо и достаточно когда в этой т-ке ф-ция имеет совпадающие между собой одностороние пределы (f(x0+)=f(x0-)) значение которые равны пределу ф-ции, т.е. f(x0+)=

f(x0-)=lim(x→x0)f(x)=A

Док-во

а) допустим ф-ция имеет в точке х0 предел равный А, тогда f(x)→ А независимо от того, приближается ли х к х0 по значению > x0 или <, а это означает равенство 1.

б) пусть односторонние пределы сущ-ют и равны f(x0+)=f(x0-) докажем, что ∃ просто предел. Возьмем произвольную {xn}→х0 разобьем если это необходимо эту последовательность на две подпоследовательности.

1. члены которые нах-ся слева от х0 {x‘n};

2. члены которые нах-ся справа от х0 {х‘‘n};

x’n→x0-o x’’n→x0+o, т.к. односторонние пределы ∃ и равны, то f(x‘n)→A и f(x‘‘n)→A поэтому посл-ть значений ф-ций {f(xn)} которая также след. справа:

1){f(x‘n)} и {f(x‘‘n)} имеет f(xn)→A на основании связи между сходимостью последовательностей

Пределы ф-ции на бесконечности

Два замечательных предела

Б/м ф-ции и их сравнения

Непрерывные ф-ции. Непрерывность.

11. Пределы ф-ции на бесконечности

Они нужны для исследования поведения ф-ции на переферии.

*Опр*. ф-ция f(x) имеет предел число А при x→+∞ если ∀ {xn} которая →к +∞ соответствующая ей последовательность {f(xn)}→A в этом случае мы пишем lim(x→+∞)f(x)=A. Совершенно аналогично с -∞.

Опр. Будем говорить что ф-ция f(x) имеет пределом число А при x→∞ {f(xn)} сходится к А

Бесконечные пределы ф-ции

Вводятся как удобные соглашения в случае, когда конечные пределы не ∃-ют.

*Р-рим на премере:* lim(x→o+)(1/x)

Очевидно не сущ-ет, т.к. для ∀ {xn}→+о посл-ть {f(xn)}={1/xn}, а числ. посл-ть сводятся к +∞.

Поэтому можно записать lim(x→o+)1/x=+∞ что говорит о неограниченных возрастаниях предела ф-ции при приближении к 0.

Аналогично с -∞.

Более того символы +∞ и -∞ употребляются в качестве предела ф-ции в данной т-ке лишь условно и означают например, что если {xn}→x0 то {f(xn)}→±∞,∞

12. Два замечательных предела

1) lim(x→0)sin/x=1

2) Явл. обобщением известного предела о посл-ти. Справедливо сл. предельное соотношение:

lim(n→∞)(1+1/n)^n=e (1)

lim(n→0)(1+x)^1/x=e (2)

t=1/x => при х→0 t→∞ из предела (2) => lim(x→∞) (1+1/x)^x=e (3)

Док-во

1)x→+∞ n x:n=[x] => n≤x<n+1 => 1/(n+1)<1/x<1/n

Посколько при ув-нии основания и степени у показательной ф-ции, ф-ция возрастает, то можно записать новое неравенство (1/(n+1))^n≤(1+1/n)^x≤ (1+1/n)^(n+1) (4)

Рассмотрим пос-ти стоящие справа и слева. Покажем что их предел число е. Заметим (х→+∞, n→∞)

lim(n→∞)(1+1/(n+1))=lim(n→∞)(1+1/(n+1))^n+1-1= lim(n→∞)(1+1/(n+1))^n+1\*lim(n→∞)1/(1+1/(n+1))=e

lim(n→∞)(1+1/n)^n+1= lim(n→∞)(1+1/n)^n\* lim(n→∞)(1+1/n)=e\*1=e

2) x→-∞. Сведем эту ситуацию к пред. Случаю путем замены переменной y=-x => y→+∞, при x→-∞.

lim(x→-∞)(1+1/x)^x=lim(y→+∞)(1-1/y)^-y= lim(y→+∞)((y-1)/y)^y=lim(y→+∞)(1+1/(y-1))^y=e

3) Пусть x→∞ произвольным образом это означает при любом любом выборе посл-ти xn сходящихся к →∞ мы должны иметь в силу (3) соотношение lim(x→∞)(1+1/xn)^xn=e (5)

Условие 5~3, т.е расшифровка 3 на языке посл-ти. Выделим из посл-ти xn 2 подпосл-ти: {x‘n}→+∞,

{x‘‘n}→-∞. Для каждой посл-ти по доказанному в п.1 и п.2 справедливо предельное соотношение 5 если заменить xn→x‘nx‘‘n. По т-ме о связи

13. Б/м ф-ции и их сравнения

*Опр*. Ф-ция α(х) наз-ся б/м если ее предел в этой т-ке равен 0 из этого определения вытекает следующее св-во б/м ф-ций:

а) Алгебраическая сумма и произведение б/м ф-ций есть б/м ф-ции.

б) Произведение б/м ф-ции на ограниченную ф-цию есть б/м ф-ция, т.е. если α(х)→0 при х→х0, а f(x) определена и ограничена (∃ С:⏐ϕ(х)⏐≤С)=> ϕ(х)α(х)→0 при х→х0

Для того чтобы различать б/м по их скорости стремления к 0 вводят сл. понятие:

1) Если отношение 2-х б/м α(х)/β(х)→0 при х→х0 то говорят что б/м α имеет более высокий порядок малости чем β.

2) Если α(х)/β(х)→A≠0 при х→х0 (A-число), то α(х) и β(х) наз-ся б/м одного порядка.

3) если α(х)/β(х)→1 , то α(х) и β(х) наз-ся эквивалентными б/м (α(х)~β(х)), при х→х0.

4) Если α(х)/β^n(х)→А≠0, то α(х) наз-ся б/м n-ного порядка относительно β(х).

Аналогичные определения для случаев: х→х0-, х→х0+, х→-∞, х→+∞ и х→∞.

14. Непрерывные ф-ции. Непрерывность.

*Опр.* f(x) непрерывны Х0 и при этом ее предел в этой т-ке сущ-ет и равен знач. ф-ции в этой т-ке, т.е. lim(x→x0)f(x)=f(x0)-*непрерывность ф-ции в т-ке.*  Из определения вытекает что в случае непрерывности ф-ции в данной т-ке вычитание пределов сводится к вычит. знач. ф-ции в данной т-ке. Равенство lim(x→x0)x=x0 (1‘). Т.е знак предела у непрерывной ф-ции можно вносить в аргумент ф-ции. Геометрически непрерывность ф-ции в т-ке х0 означает что ее график в этой т-ке не имеет разрыва. Если обозначить через Δу приращение ф-ции, т.е. Δу=f(x0+Δx)-f(x0) (приращение ф-ции в т. х0). «Δ» - символ приращения.

Приращение аргумента в т-ке х0 это соответствует тому, что текущая т. х, то условие непрерывности в т-ке х0 записывается сл. образом lim(Δx→0)Δy=0~ Δу→0 (1‘‘). Если в т-ке х0 ф-ция непрерывна, то приращение ф-ции →0 приращение аргумента.

f(x) непрерывна в т-ке х0 <≡> Δy→0 при Δх→0.

Если понятие предела приводит к понятию непр. Ф-ции то понятие одностороннего предела приводит к понятию односторонней непр. точки.

*Опр*. Если f(x) имеет предел справа в т-ке х0(=f(x0+)) и этот предел равен значению ф-ции ф-ции в т-ке х0, т.е. f(x0+)=lim(x→x0,x>x0)f(x)=f(x0), то ф-ция f(x) наз-ся непр. справа в т-ке х0.

Аналогично при вып-нии усл. f(x0-)=lim(x→x0, x<x0)f(x)=f(x0), то ф-ция наз-ся непр. слева в т. х0.

Ясно что справедлива сл.теорема вытекающая из связи односторонних пределов ф-ция f(x) непр. в т-ке х тогда, когда она непр. в этой т-ке, как справа, так и слева. f(x0-)=f(x0+)=f(x0)

*Опр*. Ф-ция f(x) непрерывна на некотором пр-ке D, если в каждой т-ке этого пр-ка при этом, если пр-ток D содержит граничную т-ку, то будем подразумевать соотв. одностор. непр. ф-ции в этой т-ке.

*Пример* Р-рим степенную производст. ф-цию

Q=f(k)=k^1/2 Q-объем выпуска продукции, к – объем капитала. D(f)=R+=>f(0)=0 и очевидно f(0+) ∃ и равно 0 => что данная ф-ция непр. на своей обл. опр-ния. Большинство ф-ций исп-мых в эк-ке непр. Например непр. ф-ции означает, что при малом изменении капитала мало будет меняться и выпуск пр-ции (ΔQ→0 при Δk→0). Ф-ции которые не явл. непр. наз-ют разрывными соотв. т-ки в которых ф-ция не явл. непр. *наз-ся т-кой разрыва*

Классификация т-ки разрыва

Непр. ф-ции на пр-ке

*Теорема ВЕЙЕРШТРАССА*

15. Классификация т-ки разрыва

Все т-ки р-рыва делятся на 3 вида: т. устранимого р-рыва; точки р-рыва 1-го , и 2-го рода.

а) если в т-ке х0 ∃ оба односторонних предела, которые совпадают между собой f(x0+)= f(x0-), но ≠ f(x0), то такая т-ка наз-ся *точкой устранимого р-рыва.*

Если х0 т-ка устранимого р-рыва, то можно перераспределить ф-цию f так чтобы она стала непр. в т-ке х0. Если по ф-ции f построить новую ф-цию положив для нее знач. f(x0)= f(x0-)=f(x0+) и сохранить знач. в др. т-ках, то получим исправл. f.

б) если в т-ке х0 ∃ оба 1-стороних предела f(x0±), которые не равны между собой f(x0+)≠f(x0-), то х0 наз-ся *т-кой р-рыва первого рода.*

в) если в т-ке х0 хотя бы 1 из односторонних пределов ф-ции не ∃ или бесконечен, то х0 наз-ся *т-кой р-рыва 2-го рода.*

При исслед. Ф-ции на непр. классификации возможных т-к р-рыва нужно применять во внимание сл. замечания:

1) Все элементарные ф-ции непрер. во внутренних т-ках своих областей определения => при исл. элементарных ф-ций нужно обращать внимание на гранич. т-ки обл-ти опр-ния.

2) Если ф-ция задана кусочно, т.е. различными соотношениями на частях своей обл. опр., то подозрительными на разрыв явл. граничные т-ки частей обл-ти опр.

3) Св-ва непр. ф-ций. Многие св-ва непр. ф-ций легко понять опираясь на их геометр. св-ва:

график непр. ф-ции на пр-ке D представляет сплошную(без р-рывов) кривую на пл-тях и след-но может отображена без отрыва ручки от бумаги.

I) Ф-ция непр. в т-ке х0 обязательно ограничена в окрестностях этой т-ки.(св-во локал. огранич-ти)

Док-во использует опр-ние на языке ε и δ. Если f непр. в т-ке х0 то взяв любое ε>0 можно найти δ>0 ⏐f(x)-f(x0)⏐<ε при ⏐х-х0⏐<δ ~ f(x0)-ε<f(x)<f(x0)+ε в окрестности в т-ке х0.

II) *Св-ва сохранения знака* Если f(x) непр. в т-ке х0 и f(x0)≠0 то ∃ окрестность этой т-ки в которой ф-ция принимает тот же знак что и знак х0.

III)*Теорема о промежуточных знач. ф-ции f(x)* непр. на отрезке [a,b] и f(a)=A, f(b)=B причем A≠B => C∈(A,B) ∃ c∈(a,b):f(c)=C f(c)=f(c‘)=f(c‘‘).

IV)*Теорема о прохожд. непр. ф-ции* *через 0*. Если f(x) непр. на отрезке (a,b) и принимает на концах этого отрезка значение разных знаков f(a) f(b), то ∃ т-ка с∈(a,b).

*Док-во* Одновременно содержит способ нах-ния корня ур-ния f(x0)=0 методом деления отрезка пополам. f(d)=0 c=d Т-ма доказана.

Пусть f(d)≠0 [a,d] или [d,b] ф-ция f принимает значение разных знаков. Пусть для определ-ти [a,d] обозначим через [a1,b1]. Разделим этот отрезок на 2 и проведем рассуждение первого шага док-ва в итоге или найдем искомую т-ку d или перейдем к новому отрезку [a2,d2] продолжая этот процесс мы получим посл-ть вложения отрезков [a1,b1]>[a2,b2] длинна которых (a-b)/2^n→0, а по т-ме о вл-ных отрезков эти отрезки стягиваются к т-ке с. Т-ка с явл. искомой с:f(c)=0. Действительно если допустить, что f(c)≠0 то по св-ву сохр. знаков в некоторой δ окрестности, т-ке с f имеет тот же знак что и значение f(c) между тем отрезки [an,bn] с достаточно N попабают в эту окрестность и по построению f имеет разный знак на концах этих отрезков.

Непр. ф-ции на пр-ке

f непр. в т-ке х0 => f непрер. в т-ке х0 и f(x0)≠0 => f непр. на [a,b] и f(x)\*f(b)=0 (f(x)\*f(b)>0 в окр-ти х0) => ∃ с∈(a,b). f(c)=0 сл-но 2 св-ва непр. ф-ции на отрезке обоснованны.

*Т-ма* 1(о огран. непр. ф-ции на отрезке). Если f(x) непр. на [a,b], тогда f(x) огран. на этом отрезке, т.е. ∃ с>0:⏐f(x)⏐≤c ∀x∈(a,b).

*Т-ма 2*( о ∃ экстр. непр. ф-ции на отр.). Если f(x) непр. на [a,b], тогда она достигает своего экстр. на этом отрезке, т.е. ∃ т-ка max X\*:f(x\*)≥f(x) ∀x∈[a,b], т-ка min X\_:f(x\_)≤f(x) ∀x∈[a,b].

*Теорема ВЕЙЕРШТРАССА.* Эти теремы неверны если замкнутые отрезки заменить на др. пр-ки

*Контрпример 1.* f(x)=1/2 на (0;1] → f – неогр. на (0;1] хотя и непрерывны.

*Контрпример 2.* f(x)=x; на (0;1) f(x) – непр. inf(x∈(0;1))x=0, но т-ки x\_∈(0;1):f(x\_)=0, т-ки x\*, хотя sup(x∈(0;1))x=1

*Док-во т-мы 1.*  Используем метод деления отрезка пополам. Начинаем от противного; f неогр. на [a,b], разделим его, т.е. тогда отрезки [a;c][c;b] f(x) неогр.

Обозн*.* [a1,b1] и педелим отрез. [a2,b2], где f-неогр. Продолжая процедуру деления неогр. получаем послед. влож. отрезки [an;bn] котор. оттяг. к т-ке d (d=c с надстройкой) из отрезка [a,b], общее для всех отр. Тогда с одной стороны f(x) неогр. в окр-ти т-ки d на конц. отрезка [an,bn], но с др. стороны f непр. на [a,b] и => в т-ке d и по св-ву она непр. в некоторой окрестности d. Оно огран. в d => получаем против. Поскольку в любой окр-ти т-ки d нах-ся все отрезки [an;bn] с достаточно большим 0.

*Док-во т-мы 2*. Обозначим E(f) – множиством значений ф-ии f(x) на отр. [a,b] по предыд. т-ме это мн-во огран. и сл-но имеет конечные точные грани supE(f)=supf(x)=(при х∈[a,b])=M(<∞). InfE(f)= inff(x)=m(m>-∞). Для опр. докажем [a,b] f(x) достигает макс. на [a,b], т.е. ∃ х\*:f(x)=M. Допустим противное, такой т-ки не ∃ и сл-но f(x)<M ∀x∈[a,b] рассмотрим вспомогат. ф-цию g(x)=1/(M-f(x) при х∈[a,b]. g(x) – непр. как отношение 2-х непр. ф-ций и то знач. 0 согластно т-ме 1 g(x)- огран. т.е. ∃ c>0

!0<g(x)≤c g≥0, на [a,b] – 1/(M-f(x))≤c => 1≤c(M-f(x)) => f(x) ≤M-1/c ∀x∈[a,b]

Однако это нер-во противор., т.к. М-точная верхн. грань f на [a,b] а в правой части стоит “C”

*Следствие*: если f(x) непр. [a,b]тогда она принимает все знач. заключ. Между ее max и min, т.е. E(f)=[m;M], где m и M –max и min f на отрезке.

Дифференцирование ф-ций

Пр-ные и дифференциалы выс. Порядков.

*Теорема Ферма Теорема Ролля Теорема Логранджа Теорема Коши* Правило Лопиталя

16. Дифференцирование ф-ций

Центральная идея диффер. ф-ций явл-ся изучение гладких ф-ций (без изломов и р-рывов кривые) с помощью понятия пр-ной или с помощью линейных ф-ций y=kx+b обладает простейшими наглядн. ф-циями; у=k‘ => k>0 то у возр. при всех х, k<0-то у убыв. при всех х, k=0 – ф-ция постоянна

Определение пр-ной

1) Пусть ф-ция y=f(x) определена по крайней мере в окр-тях т-ки х0, таким приращения Δх эл-нт. Составим соотв. ему приращения ф-ции т-ки х0. Δy=Δf(x0)=f(x0+Δx)-f(x0)

Образуем разностное отношение Δy/Δx=Δf(x0)/Δx (1) (это разностное отношение явл. ф-цией Δх, т.к. х0-фиксирована, причем при Δх→0 мы имеем дело с неопр. 0/0).

Опр. Пр-ной ф-ции y=f(x) наз-ся предел разностного отношения 1 (при условии если он ∃), когда Δх→0. Производная это предел отношения приращения в данной т-ке к приращению аргумента при усл., что посл-ть → к 0. Эта производная обозначается через df(x0)/dx или f‘(x0), у‘ (если данная т-ка х0 подразумевается или же речь идет о пр-ной в любой текущей т-ке х. Итак согласно определению f‘(x0)=lim(Δx→0) (f(x0+Δx)-f(x0))/Δx (2)

Если ф-ция f(x) имеет в т-ке х0 пр-ную, т.е. предел в правой части (2) ∃, то говорят что f(x) дифференц. в т-ке х0.

2) Непрерывность и дифференцируемость

*Т-ма*. Если ф-ция f(x) дифференц. в т-ке х0 то она непрерывна в этой т-ке, причем имеет место разложения Δf в т-ке х0 Δf(x0)=f(x0+Δx)-f(x0)= f‘(x0)Δx+α(Δx)Δx (3), где α(Δx)-б/м ф-ия при Δх→0

*Док-во*. Заметим, что разложение (3) верно, что из него сразу следует что при Δх→0 Δf(x0)→0, => в т-ке х0 ф-ция непр. Поэтому осталось док-ть рав-во (3). Если пр-ная ∃ то из определения (2) и связи предела с б/м =>, что ∃ б/м ф-ция α(Δх) такая что Δf(x0)/Δx=f‘(x0)+α(Δx) отсюда рав-во (3) пол-ся умножением на Δx.

Примеры.

1)Пр-ная постоянная и ф-ция равна 0, т.е. y=c=const ∀x, тогда y‘=0 для ∀х. В этом случае Δy/Δx числитель всегда равен пустому мн-ву, сл-но это отношение равно 0, => значит эго отн-ние = 0.

2)Пр-ная степенной ф-ции, у=х^k, y‘=kx^(k-1) ∀ k∈N. Док-м для к=0 исходя из опр-ния пр-ной. Возьмем ∀ т-ку х и дадим приращение Δх составим разностное отношение Δу/Δх=(х+Δх)^2-x^2/Δx=2х+ Δх => lim(Δx→0)Δy/Δx=2x=y‘. В дейст-ти док-ная ф-ла р-раняется для любых к.

3)Пр-ная экспон-ной ф-ции, у=е^x => y‘=e^x. В данном случае Δy/Δx=(e^x+Δx-e^x)/Δx=e^x(e^Δx-1)/ Δx. Одеако предел дробного сомножителя = 1.

4)y=f(x)=⏐x⏐=(x, x>0;-x,x<0). Ясна что для ∀ х≠0 производная легко нах-ся, причем при y‘=1при x>0 y‘=-1 при x<0. Однако в т-ке x=0 пр-ная не ∃. Причина с геом т-ки зрения явл. невозможность проведения бесисл. мн-во кассат. к гр-ку ф-ции. Все кассат. имеют угол от [-1,+1], а с аналит. т-ки зрения означает что прдел 2 не ∃ при x0=0. При Δx>0 Δy/Δx=Δx/Δx=1=>lim(Δx→0,Δx>0)Δy/Δx=1 А левый предел разн-го отн-ния будет –1. Т.к. одностор. пред. Не совпадают пр-ная не ∃. В данном случае ∃ одностор. пр-ная.

*Опр*. Правой(левой) пр-ной ф-ции в т-ке х0, наз-ся lim отношения (2) при усл. что Δх→0+(Δх→0-).

Из связи вытекает утвержд., если f(x) дифференц. в т-ке х0, то ее одностор. пр-ная также ∃ и не совпадает f‘(x0-) и f‘(x0+) обратно для ∃ пр-ной f‘(x0) необходимо, чтобы прав. и лев. пр-ные совпад. между собой. В этом случае они не совпад.

17. Пр-ные и дифференциалы выс. Порядков.

Пр-ная f‘(x) – первого порядка; f‘‘(x) – второго; f‘‘‘(x)-третьего; fn(x)=(f(n-1)(x))‘. Пр-ные начиная со второй наз-ся пр-ными выс. порядка.

Дифференциал выс. порядков

dy= f‘(x)dx – диф. первого порядка ф-ции f(x) и обозначается d^2y, т.е. d^2y=f‘‘(x)(dx)^2. Диф. d(d^(n-1)y) от диф. d^(n-1)y наз-ся диф. n-ного порядка ф-ции f(x) и обознач. d^ny.

*Теорема Ферма*. Пусть ф-ция f(x) определена на интервале (a,b) и в некоторой т-ке х0 этого интервала имеет наибольшее или наименьшее знач. Тогда если в т-ке х0 ∃ пр-ная, то она = 0, f‘(x0)=0.

2)*Теорема Ролля*. Пусть на отрезке [a,b] определена ф-ция f(x) причем: f(x) непрерывна на [a,b]; f(x) диф. на (a,b); f(a)=f(b). Тогда ∃ т-ка с∈(a,b), в которой f‘(c)=0.

3)*Теорема Логранджа*. Пусть на отрезке [a,b] определена f(x), причем: f(x) непр. на [a,b]; f(x) диф. на [a,b]. Тогда ∃ т-ка c∈(a,b) такая, что справедлива ф-ла (f(b)-f(a))/b-a= f‘(c).

4)*Теорема Коши*. Пусть ф-ции f(x) и g(x) непр. на [a,b] и диф. на (a,b). Пусть кроме того, g`(x)≠0. Тогда ∃ т-ка с∈(a,b) такая, что справедл. ф-ла (f(b)-f(a))/(g(b)-g(a))=f‘(c)/g‘(c).

Правило Лопиталя.

*Раскрытие 0/0*. 1-е правило Лопиталя. Если lim(x→a)f(x)= lim(x→a)g(x), то lim(x→a)f(x)/g(x)= lim(x→a)f‘(x)/g‘(x), когда предел ∃ конечный или бесконечный.

*Раскрытие ∞/∞.* Второе правило.

Если lim(x→a)f(x)= lim(x→a)g(x)=∞, то lim(x→a)f(x)/g(x)= lim(x→a)f‘(x)/g‘(x). Правила верны тогда, когда x→∞,x→-∞,x→+∞,x→a-,x→a+.

*Неопред-ти вида 0∞, ∞-∞, 0^0, 1^∞, ∞^0*.

Неопр. 0∞, ∞-∞ сводятся к 0/0 и ∞/∞ путем алгебраических преобразований. А неопр.0^0, 1^∞, ∞^0 с помощью тождества f(x)^g(x)=e^g(x)lnf(x) сводятся к неопр вида 0

Выпуклые и вогнутые ф-ции

Т-ки перегиба

Выпуклость и вогнутость.

Б/б пол-ти

Гладкая ф-ция

Эластичность ф-ций

Выпуклые и вогнутые ф-ции

Для хар-ки скорости возр. или убыв. ф-ции, а также крутезны гр-ка ф-ции на участке монотонности вводится понятия вогн. вып-ти ф-ции на интервале, частности на всей числ. приямой.

Пр-р. Пусть ф-ция явл-ся пр-ной ф-цией некоторой фирмы, напр. объем вып-ка продукции, а арг. х-числ. раб. силы. Хар-ный график этой ф-ции имеет сл. вид у f(x) возр. для x>0. На инт. От (0,a) ф-ция возр. все быстрее. Его можно р-ривать, как этап образования фирмы вначале которого выпуск растет медленно, поскольку первые рабочие не прошли период адаптации, но с теч. времени эффект привл. доп. раб. рабочих становится все больше, и соотв. ув-ся крутизна графика. На (∞,a) ф-ция возр. все медл. и гр. становится все более пологой. а – это пороговое знач. числ. раб. силы начиная с которого привл. доп. раб. силы начиная с которого привл. раб. силы дает все меньший эффект в объемке вып-ка. А(х) возр. f‘(x)>0 ∃x≥0, но на интервале от 0 до а (0;а) f‘(x) возр. в то время как (0;∞) f‘ убыв., а в т-ке а-max. По критерию монотонности это означает на (0;а) f‘‘(x)≥0 (f-выпукла), а на (a;∞) f‘‘(x)≤0 (f-вогнута).

*Опр*. Пусть f(x) дважды диф. ф-ция на (a,b), тогда:

1)назовем ф-цию f(x) выпуклой(вогн) на интервале (a,b), если 2-я пр-ная не отриц, т.е. f‘‘(x)≥0 (f‘‘(x)≤0) на (a,b)

2)Если в пункте 1 вып-ся строгие нер-ва 2-й пр-ной, то ф-ция наз-ся строго выпуклой(вогнутой) на интервале (a,b)

Т-ки перегиба

Опр. Т-ки разд. интервалы строгой выпуклости и строгой вогнутости наз-ся т-ми перегиба т. х0 есть т-ка перегибы, если f‘‘(x0)=0 и 2-я пр-ная меняет знак при переходе через х0=> в любой т-ке перегиба f‘(x) имеет локальный экстремум.

Геометр. т-ка перегиба хар-ся тем что проведенная касат. в этой т-ке имеет т-ки графика по разные стороны.

Выпуклость и вогнутость.

Опр. Ф-ция явл. выпуклой (вогнутой) на (a,b) если кассат. к граф-ку ф-ции в любой т-ке интервала, лежит ниже (выше) гр. ф-ции.

y=y0+f‘(x0)(x-x0)=f(x0)+f‘(x0)(x-x0) – линейная ф-ция х, который не превосходит f(x) и не меньше f(x) в случае вогнутости неравенства хар-щие выпуклость (вогнутость) через диф. f(x)≥f(x0)+ f‘(x0)(x-x0) ∀ x,x0∈(a;b) f вогнута на (а,b). Хорда выше (ниже), чем график для вып. ф-ций (вогн.) линейная ф-ция kx+b, в частности постоянна, явл. вып. и вогнутой.

Б/б пол-ти

Посл-ть {xn} *наз-ся б/б*, если для ∀ пол-ного числа А ∃ номер N такой, что при n>N вып-ся нер-во ⏐xn⏐>A

Возьмем любое число А>0. Из неравенства ⏐xn⏐=⏐n⏐>A получаем n>A. Если взять N≥А, то ∀ n>N вып-ся ⏐xn⏐>A, т.е. посл-ть {xn} б/б.

*Замечание*. Любая б/б посл-ть явл. неограниченной. Однако неогранич. Посл-ть может и не быть б/б. Например 1,2,1,3,1,…,1,n… не явл. б/б поскольку при А>0 нер-во ⏐xn⏐>A не имеет места ∀ xn с нечет. номерами.

Гладкая ф-ция

Сл. ф-ция f(x) тоже явл. гладкой, т.е. f‘ ∃ и непрерывна причем имеет место сл. ф-ла F‘(x)=f‘(ϕ(x))\*ϕ‘(x) (4). Используя ф-лу (4) получаем y‘=(lnf(a))‘=f‘(x)/f(x) (5) – *логарифмической пр-ной*. Правая часть это скорость изменения у (ф-ция f(x)) приходится на ед-цу абсол. значения этого пок-ля поэтому логарифм. Произв. наз-ют темпом прироста показателя y или f(x). Пусть известна динамика изменения цены на некотором интервале, причем P(t) гладкая ф-ция. Что можно назвать темпом роста этой ф-ции, при t=R. Темп роста≠приросту.

*Пр-р* y=e^αx. Найдем темп прироста. f‘/f=темп прироста=αe^αx/e^αx=α. Экспонициальная ф-ция имеет постоянный темп прироста.

Эластичность ф-ций

*Опр*. Пусть гладкая ф-ция y=f(x) описывает изменение экономической переменной у от эк. пер. х. Допустим f(x)>0 => имеет смысл *лог. пр-ная*. Эл-ностью ф-ции f(x) или у наз-ся сл-щая вел-на опред-мая с помощью лог. пр-ной.

Ef(x)=x\*f‘(x)/f(x)=x(lnf(x))‘ (6). Выясним эк. смысл этого показателя для этого заменим в (6) пр-ную ее разностным отношением Δf(x0)/Δx и будем иметь Ef(x)≈x(Δf(x)/Δx)/f(x)=(Δf(x)/f(x))/(Δx/x). В числителе стоит относит. Прирост ф-ции f в т-ке x, в знаменателе относ. прир. аргумента. => эл-ность ф-ции показывает на сколько % изменяется пок-ль y=f(x) при изменении перем. х на 1%. Эластичность – пок-ль реакции 1-й переменной на изменение другой.

*Пр-р*. р-рим ф-цию спроса от цены, пусть D=f(p)=-aP+b – линейная ф-ция спроса, где а>0. Найдем эластичность спроса по цене. Ed(P)=P\*D‘/D=P\*(-a)/(-aP+b)=aP/(aP-b)=> эл-ность линейной ф-ции не постоянна

Применение 1й пр-ной в исслед. ф-ций

Т-ма Ферма Т-ма Коши

Интервалы монотонности ф-ции

*Т-ма Логранджа. Т-ма Ролля Т-ма Тейлора Т-ма Коши Правило Лопиталя.*

Производная обратной ф-ции

Применение 1й пр-ной в исслед. ф-ций

Все применения базируются на опред-нии пр-ной, как предела разностного отношения, а также на сл-щей т-ме.

Т-ма Ферма. Если диф. на интервале (a,b) f(x) имеет в т-ке ч0 локальный экстремум, то пр-ная этой ф-ции обращается в 0, т.е. f‘(x0)=0 (8). Это необходимое усл. локал. экстр., но недостаточное.

*Опр*. Все т-ки в которых пр-ная ф-ции f(x) обращается в 0 наз-ся крит. т-ми f(x). Из т-мы Ферма => экстремум надо искать только через крит. т-ки.

*Т-ма Коши*. Пусть ф-ции f(x) и g(x) непрерывны на [a,b] и диф. на (a,b). Пусть кроме того, g‘(x)≠0, тогда ∃ т-ка c∈(a,b) такая, что справедлива ф-ла (f(b)-f(a))/(g(b)-g(a))=f‘(c)/g‘(c)

Интервалы монотонности ф-ции

Т-ма. Пусть f(x) диффер. На интервале (a,b), тогда справедливы сл. утверждения f(x) монотонно возр. (убывает) на интервале (a,b) тогда, когда f‘(x)≥0 на интервале (a,b) и f‘(x)>0 (f‘(x)<0), то строго возр. (убыв) на (a,b).

х∈ интерв. монотонно убывает, касательная имеет тупой угол наклона f‘(x1)<0 для x2 противоположная ситуация.

Т-ма Логранджа. Пусть ф-ция f(x) непрер. на отрезке [a,b] и диф. на интервале (a,b), тогда ∀ т. х и x+Δx ∈ [a,b] ∃ т-ка С лежащая между х и х+Δх такая что спаведлива ф-ла (f(x+Δx)-f(x))=f(c)\*Δx (7) => при сравнении с ф-лой приращения ф-ций с диф. заметим, что (7) явл. точной ф-лой, однако теперь пр-ная фолжна считаться в некоторой средней т-ке С «алгоритм» выбора которой неизвестен. Крайнее значение (a,b) не запрещены.

Придадим ф-ле (7) классический вид => x=a x+Δx=b+> тогда ф-ла (7)=(f(b)-f(a))/(b-a)=f‘(c) (7‘) – ф-ла конечных приращений Логранджа.

(f(b)-f(a))/(b-a)=f‘(c) (1)

*Док-во* сводится к сведению к т-ме Ролля. Р-рим вспом. ф-цию g(x)=f(x)-f(a)-(f(b)-f(a))/(b-a) \* (x-a)

Пусть ф-ция g(x) удовл. всем усл. т-мы Ролля на [a,b]

А)Непрерывна на [a,b]

Б) Дифференц. на (a,b)

В) g(a)=g(b)=0

Все усл. Ролля соблюдены, поэтому ∃ т-ка С на (a,b) g‘(c)=0 g‘(c)=f‘(x)-(f(b)-f(a))/(b-a). Ф-ла (1) наз-ся ф-лой конечных приращений.

Т-ма Ролля. Пусть ф-ция f(x) удовл. сл. усл.

А)Непрерывна на [a,b]

Б) Дифференц. на (a,b)

В) принимает на коцах отрезков равные значения f(a)=f(b), тогда на (a,b) ∃ т-ка такая что f‘(c)=0, т.е. с-крит. т-ка.

*Док-во*. Р-рим сначала, тривиальный случай, f(x) постоянная на [a,b] (f(a)=f(b)), тогда f‘(x)=0 ∃ x ∈ (a,b), любую т-ку можно взять в кач-ве с. Пусть f≠ const на [a,b], т.к. она непрер. на этом отрезке, то по т-ме Вейерштрасса она достигает своего экстрем. на этом отрезке и max и min. Поскольку f принимает равные знач. в гранич. т-ках, то хотя бы 1- экстр. – max или min обязательно достигается во внутр. т-ке. с∈(a,b) (в противном случае f=const), то по т-ме Ферма, тогда f‘(c)=0, что и требовалось д-ть.

Т-ма Тейлора. «О приближении гладкой ф-ци к полиномам»

Опр. Пусть ф-ция f(x) имеет в т-ке а и некоторой ее окрестности пр-ные порядка n+1. Пусть х - любое значение аргумента из указанной окрестности, х≠а. Тогда между т-ми а и х надутся т-ка ε такая, что справедлива ф-ла Тейлора. f(x)=f(a)+f‘(a)/1!(x+a)+ f‘‘(a)/2!(x+a)^2+f^(n)(а)/n!+f^(n+1)(ε)/(n+1)!(x-a)^(n+1).

*Док-во*. Сводится к Роллю путем введения вспом. переменной g(x).

g(x)=f(x)-f(a)-f‘(x)(x-a)-…-1/n!\*f^n(x)(x-a)^n-1/(n+1)!(x-a)^n+1\*λ. По т-ме Роляя ∃ т-ка с из (a,b), такая что g(c)=0 λ=f^(n+1)(c)

Правило Лопиталя.

Пусть ф-ция f(x) и g(x) имеет в окр. т-ки х0 пр-ные f‘ и g‘ исключая возможность саму эту т-ку х0. Пусть lim(х→Δх )=lim(x→Δx)g(x)=0 так что f(x)/g(x) при x→x0 дает 0/0. lim(x→x0)f‘(x)/g‘(x) ∃ (4), когда он совпадает с пределом отношения ф-ции lim(x→x0)f(x)/g(x)= lim(x→x0)f‘(x)/g‘(x) (5)

Док-во.

Возьмем ∀ т-ку х>х0 и рассмотрим на [x0;x] вспом ф-цию арг. t

h(t)=f(t)-Ag(t), если t∈[x0;x], т.к. удовл. этому св-ву в окр-ти т-ки х0, а т-ку х мы считаем достаточно близкой к х0. Ф-ция h непрерывна на [x0;x], поскольку lim(t→x0)h(t)=lim(t→x0)[f(t)-Ag(t)]=lim(t→x0)-A lim(t→x0)g(t)=0=h(0)=> непр. t=x0 По т-ме Логранджа (x0,x)∃ c:h‘‘(c)=0

Производная обратной ф-ции

Т-ма. Для диф. ф-ции с пр-ной, не равной нулю, пр-ная обратной ф-ции равна обратной обратной величине пр-ной данной ф-ции.

Док-во. Пусть ф-ция y=f(x) диф. и y‘x=f‘(x)≠0.

Пусть Δу≠0 – приращение независимой переменной у и Δх – соответствующее приращение обратной ф-ции x=ϕ(y). Напишем тождество: Δx/Δy=1:Δy/Δx (2) Переходя к пределу в рав-ве (2) при Δу→0 и учитывая, что при этом также Δх→0, получим: lim(Δy→0)Δx/Δy=1:lim(Δx→0)Δy/Δx => x‘y=1/y‘x. Где х‘у – пр-ная обратной ф-ции.

Производная обратной ф-ции

Т-ма. Для диф. ф-ции с пр-ной, не равной нулю, пр-ная обратной ф-ции равна обратной обратной величине пр-ной данной ф-ции.

Док-во. Пусть ф-ция y=f(x) диф. и y‘x=f‘(x)≠0.

Пусть Δу≠0 – приращение независимой переменной у и Δх – соответствующее приращение обратной ф-ции x=ϕ(y). Напишем тождество: Δx/Δy=1:Δy/Δx (2) Переходя к пределу в рав-ве (2) при Δу→0 и учитывая, что при этом также Δх→0, получим: lim(Δy→0)Δx/Δy=1:lim(Δx→0)Δy/Δx => x‘y=1/y‘x. Где х‘у – пр-ная обратной ф-ции.

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема Больцано-Коши

Теорема Вейерштрасса

Теорема Больцано-Вейерштрасса Из любой огран. посл-ти можно выбрать сход. подпосл-ть.

Док-во

1. Поскольку посл-ть ограничена, то ∃ m и M, такое что ∀ m≤xn≤M, ∀ n.

Δ1=[m,M] – отрезок, в котором лежат все т-ки посл-ти. Разделим его пополам. По крайней мере в одной из половинок будет нах-ся бесконечное число т-к посл-ти.

Δ2 – та половина, где лежит бесконечное число т-к посл-ти. Делим его пополам. По краней мере в одной из половинок отр. Δ2 нах-ся бесконечное число т-к посл-ти. Эта половина - Δ3. Делим отрезок Δ3 … и т.д. получаем посл-ть вложенных отрезков, длинны которых стремятся к 0. Согластно о т-ме о вложенных отрезках, ∃ единств. т-ка С, кот. принадл. всем отрезкам Δ1, какую-либо т-ку Δn1. В отрезке Δ2 выбираю т-ку xn2, так чтобы n2>n1. В отрезке Δ3 … и т.д. В итоге пол-ем посл-ть xnk∈Δk.

Теорема Больцано-Коши Пусть ф-ция непр-на на отрезке [a,b] и на концах отрезка принимает зн-ния равных знаков, тогда ∃ т-ка с ⊂ (a,b) в которой ф-ция обращается в 0.

Док-во

Пусть Х – мн-во таких т-к х из отрезка [a,b], где f(x)<0. Мн-во Х не пустое. Х∈ [a,b], значит х ограничено, поэтому оно имеет точную верхнюю грань. c=supx. a≤c≤b покажем a<c<b по т-ме об уст. знака, поэтому c≠a, c≠b. Предположим f(c)=0, что это не так, тогда ∃ окрестность т-ки с в пределах которой ф-ция сохраняет знак, но это не можетбыть, т.к. по разные стороны т-ки с ф-ция имеет разный знак. f(с)=0.

Теорема Вейерштрасса Непрерывная ф-ция на отрезке ограничена.

*Док-во* Предположим что ф-ция не ограничена. Возьмем целое пол-ное n, т.к. ф-ция не ограничена, то найдется xn∈[a,b], такое что ⏐f(xn)⏐>n. Имеем посл-ть т-к xn. По т-ме Больцано-Коши из посл-ти xn можно выбрать сходящиюся подпосл-ть xnk∃→x0. По т-ме о предельном переходе к неравенству.

a≤xnk≤b a≤x0≤b x0∈[a,b]

Если посл-ть xnk сходится к x0, то f(xnk) будет сходится f(x0)

⏐f(xnk)⏐>nk, a nk→∞⇒⏐f(xnk)⏐→∞, т.е. f(xnk) б/б посл-ть.

С одной стороны f(xnk) стремится к опр. числу, а с др. стороны стремится к ∞, пришли к противоречию, т.к. мы предположим, что ф-ция не ограничена. Значит наше предположение не верно.