**«Liber аbaci» Леонардо Фибоначчи**

Наталья Карпушина

Отец мой, родом из Пизы, служил синдиком на таможне в Бужи, в Африке, куда он меня взял с собою для изучения искусства считать. Удивительное искусство считать при помощи только девяти индусских знаков мне так понравилось, что я непременно захотел познакомиться с тем, что известно об этом искусстве в Египте, Греции, Сирии, Сицилии и Провансе. Объехав все эти страны, я убедился, что индусская система счисления есть самая совершенная... Изучив основательно эту систему и все к ней относящееся, прибавив свои собственные исследования и почерпнутое из «Начал» Евклида, я решился написать это сочинение.

Из предисловия автора к трактату «Liber abaci»

Леонардо Пизанский (ок. 1180...1240)

**Книга-энциклопедия**

В 1202 г. появилась на свет знаменитая «Книга абака» Леонардо Пизанского (более известного под прозвищем Фибоначчи – сын Боначчи), крупнейшего европейского математика эпохи Средневековья. Этот объемный труд, насчитывающий в печатном варианте 459 страниц, стал настоящей энциклопедией математических знаний того времени и сыграл важную роль в их распространении в странах Западной Европы в следующие несколько столетий. Работа написана на латыни и считается первым сочинением такого рода, автор которого был христианином.

«Liber abaci», или трактат по арифметике (а именно так можно истолковать название, поскольку под «абаком» Леонардо понимал не счетную доску, а арифметику), отличалась полнотой охвата и глубиной изложения. В ней подробно разъяснялись не только азы науки о числах и действиях над ними, но и основы учения об уравнениях, т.е. алгебры. Кроме того, в «Liber abaci» имелось большое количество задач практического содержания, иллюстрировавших различные приемы решения, как арифметические – тройное правило, правило товарищества, метод ложного положения и др., так и алгебраические, приводящие к одному или нескольким уравнениям.

Само изложение было словесным, лишенным привычных для современного читателя символов и формул, а решение примеров и задач, носивших, как мы говорим сегодня, частный характер, сводилось к описанию действий, которые следовало применить в той или иной конкретной ситуации, и нередко сопровождалось разъяснениями или полезными комментариями автора.

Книга была адресована не только ученым мужам, но и более широкому кругу читателей: купцам, счетоводам, продавцам, чиновникам и т.д. В предисловии отмечалось, что автор написал свой труд, дабы «род латинян» не прибывал более в незнании излагаемых в нем вещей. Однако для многих из тех, кому предназначалась «Liber abaci», книга оказалась трудновата, поэтому несмотря на популярность и доработанное автором издание\* 1228 г., не получила того широкого распространения, которого заслуживала.

\* До нас «Liber abaci» дошла как раз во втором варианте. Ее первое печатное издание появилось на родине математика, в Италии, в средине XIX в. =

Зато трактат Леонардо приобщил к достижениям индийских и арабских математиков европейских ученых и оказал существенное влияние на дальнейшее развитие алгебры и теории чисел. «Liber abaci» была востребована математиками эпохи Возрождения и Нового времени, сумевшими оценить ее по достоинству, ведь книга отличалась не только богатством и разнообразием рассмотренных в ней примеров и методов, но и строгостью, доказательностью изложения.

На протяжении нескольких столетий по труду Фибоначчи ученые знакомились с двумя важнейшими разделами математики – арифметикой и алгеброй и черпали из него задачи и оригинальные методы решения, благодаря чему уже в XV–XVI вв. те разошлись по многочисленным итальянским, французским, немецким, английским, а позже и русским рукописям, печатным книгам и учебникам. Некоторые задачи или их аналоги можно обнаружить и в «Сумме арифметики» Пачиоли (1494), и в «Приятных и занимательных задачах» Баше де Мизириака (1612), и в «Арифметике» Магницкого (1703), и даже в «Алгебре» Эйлера (1768).

**Заслуги и достижения Леонардо Пизанского**

Каково же было содержание написанной Фибоначчи книги-энциклопедии, в которой насчитывалось целых пятнадцать глав? Оказывается, в ней рассматривался весьма обширный круг вопросов:

индусская система нумерации;

правила действий над целыми числами;

дроби и смешанные числа;

разложение чисел на простые множители;

признаки делимости;

учение об иррациональных величинах;

способы приближенного вычисления квадратных и кубических корней;

свойства пропорции;

арифметическая и геометрическая прогрессии;

линейные уравнения и их системы.

Наконец, отдельная глава была посвящена квадратным уравнениям и геометрическим задачам на применение теоремы Пифагора.

Основную часть сведений автор кропотливо собирал, путешествуя по разным странам как купец, кое-что почерпнул из трудов Евклида (а по сути – из наследия античных математиков). Особую ценность представляло подробное изложение малоизвестной тогда в Европе индусской (десятичной) системы счисления и новых методов вычисления, позволявших заметно упростить всевозможные расчеты и успешно решать большой круг задач\*.

\* В своем труде Леонардо упомянул о разных нумерациях, как известных у него на родине, так и использовавшихся в странах Востока, которые он посетил, и показал преимущества индусской системы счисления. А начинался трактат так: «Девять индусских знаков суть следующие: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. С помощью этих знаков и знака 0, который называется по-арабски «сифр», можно написать какое угодно число».

Надо сказать, отдельные случаи использования этой системы встречались и ранее. С Востока ее привозили паломники, ученые, купцы, посланники и военные. Наиболее древний европейский манускрипт, в котором упоминаются придуманные индусами цифры, относится еще к концу X в. Однако десятичная система счисления очень медленно проникала в западные страны и получила там широкое распространение лишь в эпоху Возрождения.

Отметим также, что именно благодаря Фибоначчи европейцы познакомились с общими правилами решения квадратных уравнений, описанными в трактате аль-Хорезми.

Но Леонардо Пизанский был не только автором-составителем энциклопедии «Liber abaci». В ней математик отразил и результаты собственных научных изысканий. В частности, в этом труде он впервые:

сформулировал правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии;

рассмотрел возвратную последовательность, в которой каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих ему чисел;

ввел термин «частное» для обозначения результата деления;

описал способ приведения дробей к общему знаменателю с помощью нахождения наименьшего общего кратного знаменателей (более рациональный, чем использовали арабские математики).

Кроме того, Фибоначчи самостоятельно разработал ряд алгебраических приемов решения задач, исследовал некоторые уравнения высших степеней, сводящиеся к квадратным, и первым среди европейских ученых подошел к введению отрицательных чисел и их толкованию как долга, что по тем временам являлось огромным достижением.

**Универсальный задачник**

Немалую ценность «Liber abaci» придавало наличие в ней множества разнообразных задач, одни из которых были заимствованы из арабских и прочих источников, а другие придуманы самим автором. Большую группу составляли чисто арифметические и алгебраические примеры: на выполнение действий над числами, извлечение корней, решение уравнений или систем и т.д. В другую группу входили сюжетные задачи (в том числе связанные с житейскими ситуациями): на смешение, определение стоимости или количества купленного товара, раздел имущества и разного рода финансовые расчеты между людьми (задачи коммерческой арифметики) и т.п.

Например, к задачам на смешение относились два вида задач «на сплавы»: на определение пробы сплава, сделанного из других сплавов известного состава и количества, и на выяснение того, сколько каждого из данных сплава потребуется, чтобы получить сплав нужной пробы. А одной из типичных задач коммерческой арифметики была задача на раздел некоторой суммы денег пропорционально долям участников.

В трактат Фибоначчи вошли также текстовые задачи на воспроизведение определенного действия, например нахождения числа по его части. Вот одна из них. Четвертая и третья части дерева находятся под землей и составляют 21 фут. Чему равна длина всего дерева?

Некоторые из затронутых в труде Леонардо вопросов в разное время привлекали внимание ученых-математиков и не раз упоминались в более поздних сочинениях. Так произошло, в частности, с популярной в средние века задачей на отыскание наименьшего набора различных гирь, с помощью которого можно уравновесить любой груз с целочисленной массой, не превосходящей заданного числа.

Но наиболее известной по сей день остается, конечно же, задача о размножении кроликов, впервые появившаяся именно в «Liber abaci». Спрашивается, сколько пар кроликов родится за год от одной пары, если кролики начинают приносить потомство со второго месяца и каждая пара через месяц производит на свет еще одну пару? Ее решение привело Фибоначчи к открытию едва ли ни самой знаменитой числовой последовательности

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ,

названной впоследствии его именем и породившей множество исследований, в особенности связанных с изучением свойств золотой пропорции.

**Знакомые задачи из трактата Фибоначчи**

А теперь поговорим подробнее о некоторых арифметических и алгебраических задачах из «Liber abaci», с которыми должны легко справиться (в отличие от первых читателей книги Леонардо) и нынешние школьники. Задачи эти интересны не только, а иногда и не столько своими решениями или конкретным математическим содержанием. Во многом они любопытны с исторической точки зрения, поскольку имеют свою биографию, выдержали испытание временем, «прижились» и благополучно дошли до наших дней. К тому же, рассматривая предложенную кем-то задачу, никогда не бывает лишне ознакомиться с чужим рассуждением и сравнить его с собственным решением. Тем более, когда читателя и автора разделяют столетия, а то и тысячелетия!

Задача 1. Найти число, 19/20 которого равны квадрату самого числа.

Ответ: 19/20.

Комментарий. Ответ очевиден каждому, кто знаком с понятием квадрата числа. Решая задачу с помощью квадратного уравнения 19/20 x = x2 мы получим еще одно удовлетворяющее условию задачи число – 0.

Автор же, очевидно, имел в виду число, отличное от нуля. Что вообще-то неудивительно. Во времена Леонардо Пизанского нуль не признавался за корень уравнения, т.е. за число. Впрочем, это не мешало некоторым математикам и до, и после Фибоначчи выполнять простейшие операции с нулем, который воспринимался ими как символ, обозначавший «ничто».

Задача 2. Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года. Природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождаются кролики со второго месяца. Сколько пар кроликов будет через год?

Ответ: 377 пар.

Комментарий. Даже одной этой задачи хватило бы Фибоначчи, чтобы оставить след в истории науки. Именно в связи с ней сегодня чаще всего и упоминается имя ученого. Решая задачу о размножении кроликов, Леонардо описал бесконечную числовую последовательность (an), любой член которой, начиная с третьего, выражается через предыдущие члены:

a1 = 1, a2 = 1, an+2 = an+1 + an, где n ≥ 1.

Для математиков она является прежде всего классическим примером рекуррентной последовательности, элементы которой, числа Фибоначчи, обладают многими весьма интересными и нашедшими неожиданные применения свойствами. Из них широко известно следующее: предел отношения an+1 к an при неограниченном возрастании n устремляется к знаменитому числу Ф ≈ 1,618, выражающему божественную пропорцию.

Что же касается ответа в задаче о кроликах, то (в соответствии с указанными в тексте условиями) он совпадает с 13-м членом построенной Леонардо последовательности 1, 2, 3, 5, 8, ... – числом 377. Здесь каждое число, начиная со второго, показывают, сколько всего пар кроликов будет насчитываться к началу очередного месяца.

Заметим, что Фибоначчи рассматривал свою задачу для взрослой пары кроликов (на это указывают слова «рождаются кролики со второго месяца»). Если же решать ее для новорожденной пары, получится последовательность (1); в таком случае ровно через год количество животных увеличится до 233 пар особей\*.

\* Спустя полтора столетия индийский математик Нарайана рассматривал похожую задачу: найти число коров и телок, происходящих от одной коровы в течение 20 лет, при условии, что корова в начале каждого года приносит телку, а телка, достигнув трех лет, дает такое же потомство в начале года. Если решать задачу, составляя рекуррентное соотношение, придем к последовательности 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, ... .

Задача 3. Семь старух отправляются в Рим. У каждой по семь мулов, каждый мул несет по семь мешков, в каждом мешке по семь хлебов, в каждом хлебе по семь ножей, каждый нож в семи ножнах. Сколько всего предметов?

Ответ: 137 256 предметов.

Комментарий. Перед нами хорошо известная, встречающаяся у разных народов задача-шутка, как ее часто называют историки математики, полагая, что в былые времена она была всего лишь нехитрой забавой для учеников. А ведь эта восходящая еще к древним египтянам задача, вернее ее решение, служит прекрасной наглядной иллюстрацией построения геометрической прогрессии и нахождения суммы первых n ее членов по известному первому члену и знаменателю. И именно в таком качестве ее вполне можно использовать в обучении детей математике.

От аналогичной задачи из папируса Ахмеса\* задача из трактата Фибоначчи по сути отличается лишь тем, что в ней суммируются не пять, а шесть чисел:

S6 = 7 + 72 + ... 76 = [7 · (76 – 1)]/6 = 137 256

\* Напомним ее условие: «У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти по семь мер зерна. Как велики числа этого ряда и как велика их сумма?» А вот для сравнения русский вариант задачи, рассмотренной в книге Леонардо: «Шли семь старцев, у каждого старца по семь костылей, на каждом костыле по семь сучков, на каждом сучке по семь кошелей, в каждом кошеле по семь пирогов, в каждом пироге по семь воробьев. Сколько всего?»

Задача 4. Выбрать пять гирь так, чтобы с их помощью можно было взвесить любой груз массой от 1 до 30 целых весовых единиц. При взвешивании все гири разрешается класть только на одну чашку весов.

Ответ: надо взять гири с массами 1, 2, 4, 8 и 16 весовых единиц.

Комментарий. Затронутый в задаче вопрос равносилен вопросу о представлении натурального числа n ≤ 30 в виде суммы не более пяти различных натуральных чисел из набора m1, ..., m5 , не превосходящих n:

n = a1 · m1 + a2 · m2 + a3 · m3 + a4 · m4 + a5 · m5 ,

где каждый из множителей a1, ..., a5 равен 1 или 0 (гиря либо кладется на чашку весов, либо нет). Но тогда естественно перейти к двоичной системе счисления:

n = a5 · 24 + a4 · 23 + a3 · 22 + a2 · 21 + a1 · 20.

Таким образом, в набор должны входить гири, массы которых выражаются числами 1, 2, 4, 8 и 16.

Хотя данную задачу часто связывают с именем французского математика и поэта Баше де Мезириака\*, она встречается еще у Фибоначчи. Вероятно, и тот не сам ее придумал. А настоящим автором этой до недавнего времени актуальной практической задачи мог быть какой-нибудь сметливый торговец, которому частенько приходилось взвешивать свой товар.

\* Клод Гаспар Баше де Мезириак (1581...1638) известен, в частности, как автор книг по занимательной математике. В одной из них и приведена задача об оптимальной системе гирь.

В «Liber abaci» содержался также более сложный вариант рассмотренной задачи. В нем разрешается класть гири на обе чашки весов, а значит, надо будет думать не только о выборе гирь, но и о том, куда и каком количестве их добавлять. Ясно, что в данном случае каждое из чисел ai может принимать три различных значения (гиря добавляется либо на свободную чашку весов, либо на чашку с грузом или вообще не используется) и приходится обращаться уже к троичной системе счисления. Решив задачу для n ≤ 40, Леонардо получил в ответе набор гирь массами 1, 3, 9 и 27 весовых единиц.

Оба варианта задачи интересны еще и тем, что найденные числа являются членами геометрических прогрессий со знаменателями q = 2 и q = 3 соответственно. А к системе из пяти гирь, упоминающейся в задаче 4, можно прийти, рассматривая неравенство

30 ≤ 1 + 2 + 22 + ... + 2m–1, или 30 ≤ 2m – 1.

Его наименьшее натуральное решение m = 5.

Задача 5. Если первый человек получит от второго 7 денариев, то станет в пять раз богаче второго, а если второй человек получит от первого 5 денариев, то станет в семь раз богаче первого. Сколько денег у каждого?

Ответ: 7 2/17 и 9 14/17 денариев.

Комментарий. Обозначив буквами x и y количество денег, имеющихся у первого и у второго человека, получим систему

из которой найдем x = 7 2/17 и y = 9 14/17. Такой способ решения напрашивается сам собой, поскольку в задаче говорится о двух неизвестных.

А вот Леонардо Пизанский в своих рассуждениях ограничился одной неизвестной, назвав ее по давно укоренившейся среди математиков традиции «вещью». Приняв имущество второго человека за вещь и семь денариев, т.е. за (x + 7), он выразил имущество первого как (5x – 7) и в дальнейшем пришел к линейному уравнению

x + 12 = 7 (5x – 12).

Попутно заметим, что в трактате Фибоначчи содержатся аналогичные задачи и с бóльшим числом людей.

Задача 6. 30 птиц стоят 30 монет. Куропатки стоят по 3 монеты, голуби по 2, а пара воробьев – по монете. Сколько птиц каждого вида?

Ответ: 3 куропатки, 5 голубей, 22 воробья.

Комментарий. Из-за большого количества неизвестных данную задачу вполне логично решать алгебраически. Если число куропаток, голубей и воробьев обозначить буквами x, y, z соответственно, то решение сведется к нахождению тройки натуральных чисел, удовлетворяющих системе уравнений

Исключив z и выразив затем x через y, получим x = 6 – 3/5 y. Единственное возможное значение y равно 5, тогда x = 3, z = 22.

Интересно, что данную задачу автор «Liber abaci» рассматривал как задачу на сплав достоинства 1, который должен получиться из трех целочисленных количеств достоинством 3, 2 и 1/2. Эта же задача, но с чуть измененными числовыми данными (стоимость птиц разного вида выражается обратными числами: 1/3, 1/2 и 2) разбиралась еще в одном сочинении Леонардо.

Задача 7. Решить систему уравнений

Ответ: (15 – 5√5; 5√5 – 5).

Комментарий. На самом деле данная система является симметричной и имеет ни одно, как указал Фибоначчи, а два решения; второе – (5√5 – 5; 15 – 5√5).

Но интересна задача не только этим. В «Liber abaci» приведены разные способы ее решения.

Во-первых, «стандартный» в нашем понимании: с помощью подстановки y = 10 – x. Исключаем y и сводим задачу к решению квадратного уравнения

x2 + 100√5 – 200 = 10x.

Во-вторых, посредством замены. Пусть y/x = z, тогда x/y = √5 – z. Так как y/x · x/y =1, приходим к уравнению z(√5 – z) = 1, из которого определяем z. С другой стороны, y = 10 – x, z = (10 – x)/x, откуда легко найти x, а затем уже вычислить y.

Идея первого способа решения выглядит, конечно, прозрачнее и привычнее, однако решать им систему технически не проще, чем вторым способом. А, как известно, в подобных задачах простота вычислений, особенно если те связаны с корнями, играет не последнюю роль!

**Опередивший время**

Как отмечают исследователи, «Liber abaci» не просто выделяется, а резко возвышается над средневековой литературой по арифметике и алгебре. Прежде всего благодаря фундаментальности изложения и многообразию рассмотренных в ней методов и задач. Уровень сочинения оказался столь высок, что осилить и воспользоваться изложенными в нем сведениями смогли главным образом ученые-математики, отчасти современники Леонардо, и в еще большой мере – представители последующих поколений.

Фактически лишь спустя три столетия после выхода в свет «Liber abaci» стало заметно ее влияние на работы других авторов. С появлением труда Фибоначчи европейские ученые эпохи Средневековья, бывшие зачастую философами-схоластами или духовными лицами, для кого математика не была основным занятием, стали уделять больше внимания алгебре и затрагивать в своих исследованиях ее новые вопросы. Однако первых серьезных результатов удалось достичь только в эпоху Возрождения, к началу XVI столетия, когда группа итальянских математиков (Сципион дель Ферро, Никколо Тарталья, Иероним Кардано, Людовико Феррари) получила общее решение кубических уравнений, положив тем самым начало высшей алгебре.

Выходит, что как ученый Леонардо Пизанский не только превзошел, но и на многие десятилетия опередил западноевропейских математиков своего времени. Подобно Пифагору, привнесшему в греческую науку знания, некогда полученные от египетских и вавилонских жрецов, Фибоначчи во многом способствовал передаче приобретенных им в молодости математических знаний индусов и арабов в западноевропейскую науку и заложил фундамент для ее дальнейшего развития.