***Формулы, возможно неизвестные, для решений уравнения Пифагора***

Выведены формулы (возможно ранее неизвестные, в широко доступной литературе не встречаются) для решений уравнения Пифагора x^2 + y^2 = z^2. Формулы отличаются от общеизвестных формул древних индусов и вавилонян. Формулы древних индусов:

*x= a*– *b, y=2ab, z= a+ b*, *a > b.*



**Вывод других формул**

Известно, что уравнение *x* + *y* = *z* (1)



имеет целые решения, например, общеизвестные тройки чисел Пифагора. Таких решений, доказал ещё Евклид, имеется бесконечное множество. Тройку целых положительных чисел *x,y,*z не имеющих общих делителей, назовём оригинальным решением уравнения (1). Далее оригинальные решения будут обозначаться большими буквами *X,Y,*Z. Пусть далее везде *x* < *y* < *z.*

Так как *x*, *y* и *z* числа целые, то существуют целые положительные числа *a* и *b,* такие, что *x* = *z* – *a* и *y* = *z* – *b,* где *b* < *a,* так как по условию *x* < *y*. Тогда уравнение (1) запишется следующим образом: *( z - a)*+ *(z - b)* = *z* (2).



После возведения в степень и группирования из (2) получится следующее уравнение:

*z*– *2 (a + b ) z + ( a+ b) = 0* (3).



В результате решения уравнения (3) относительно *z* получим:

*z* = + *a* + *b; x* = + *b; y* = + *a;* (4).



Корень не может быть отрицательным в результате решения уравнения (3), потому что по условию не может быть отрицательным или равным нулю ни одно из чисел *x,y*.



Все три числа целого решения содержат корень , который определяет такие решения и должен быть целочисленным. Кроме того, для получения оригинальных решений числа *a* и *b* должны быть взаимно просты, т.е. не иметь общих делителей отличных от 1.



Число является целым в следующих случаях:



- *случай 1*: *a=2c, b=d,*=*2cd;* после подстановки значений *a* и *b* в (4) получим:



*X=d(2c+d); Y=2c(c+d); Z=2c(c+d)+ d;* (5),



здесь *a>b, a* –чётное число, *b* –нечётное, следовательно, *X,Z* – нечётные, *Y –* чётное;

- *случай 2*: *a=c, b=2d,*=*2cd;* после подстановки значений *a* и *b* в (4) получим:



*X=2d (c+d); Y=c(c+2d); Z=c(c+2d)+ 2d* (6),

здесь *a>b, a* – нечётное число, *b* – чётное, следовательно, *X* – чётное, а *Y* и *Z* – нечётные;

*примечание:*в случаях 1 и 2 числа *c* и *d* целые и взаимно простые, потому что таковыми являются *a* и *b*. Если определены и целы *c* и *d,* то определены и целы все числа *X,Y,*Z.

**Следствия**

Общие формулы (46) для решений уравнения (1) доказывают бесконечность множества троек целых решений и могут быть использованы для получения целых решений, не имеющих общих делителей. Приэтом должно всегда быть *a>b,* атакже *a* и *b* должны быть взаимно просты. Так как число *b* меньшее из последних двух, то удобно обозначать ряды решений по его значению, например, если *b=1,* то ряд решений *P1* (Пифагор).



***Ряд P1:*** *b= d=1, a=2c,* =*2c* , где *c=1,2,3,…*



Подставляя *d* и *c* в (5) получим неограниченный ряд оригинальных целых решений *X, Y, Z*:

*X = 2c+1; Y = 2c(c+1); Z = 2c(c+1)+1.*

Первые решения этого ряда: 3,4,5; 5,12,13; 7,24,25; 9,40,41; 11,60,61; 13,84,85; 15,112,113; 17,144,145; 19,180,181; 21,220,221; 23,264,265; 25,312,313; 27,364,365; 29,420,421; …

***Ряд P2:*** *b=2d=, a=c,* =*2c ,* где *c=3,5,7,…*



Последовательность *c* начинается с *3*, потому что *a > b,* и нечётна, чтобы не было общих делителей с *b*. После подстановки *d=1* и *c* в (6):

*X = 2(c+1); Y = c(c+2); Z = c(c+2)+2.*

Первые решения этого ряда: 8,15,17; 12,35,37; 16,63,65; 20,99,101; 24,143,145; 28,195,197; 32,255,257; 36,323,325; 40,399,401; 44,483,485; 48,575,577; 52,675,677; 56,783,785;…

***Ряд P8:*** *b=2d=, a=c,* =*4c ,* где *c=3,5,7,…*



*X = 4(c+2); Y = c(c+4); Z = c(c+4)+8.*

20,21,29; 28,45,53; 36,77,85; 44,117,125; 52,165,173; 60,221,229; 68,285,293; 76,357,365; 84,437,445; 92,525,533; 100,621,629; 108,725,733; 116,837,845; 124,957,965; …

***Ряд P9:*** *b= d=3, a=2c,* =*6c .* где *c mod 30, c=4,5,7,8,10,11,…*



33,56,65; 39,80,89; 51,140,149; 57,176,185; 69,260,269; 75,308,317; 87,416,425; 93,476,485; 105,608,617; 111,680,689; 123,836,845; 129,920,929; 141,1100,1109; 147,1196,1205; и т.д.

Диофант в своей «Арифметике» рассматривал особую группу троек целых решений уравнения (1), так называемые «хромые» треугольники, катеты которых, т.е. *X* и *Y*, отличаются на 1.

Для *случая 1* условие существования таких решений:  *d= 2c*– *1.*



***Ряд D1:*** 3, 4, 5; 119, 120, 169; 4059, 4060, 5741; 137903, 137904, 195025; 4684659, 4684660, 6625109; 159140519, 159140520, 225058681; 5406093003, 5406093004, 7645370045; 183648021599, 183648021600, 259717522849; …

Для *случая 2* условие существования таких решений: *2d= c*– *1.*



***Ряд D2:*** 20,21,29; 696 ,697, 985; 23660, 23661, 33461; 803760, 803761, 1136689; 27304196, 27304197, 38613965; 927538920, 927538921, 1311738121;

31509019100, 31509019101, 44560482149;

1070379110496, 1070379110497, 1513744654945; …

Первый и наименьший такой треугольник – *3,4,5,* для которого *c=d=1* (случай 1).С помощью простых формул, исходя из него, могут быть вычислены сколько угодно много других «хромых» треугольников *(m=1,2,3,…):*

*d= c+ d*;  *c= 2d + 1; X,Y,Z* рассчитываются по (6);



*c= c+ d; d= 2c* – *1; X,Y,Z* рассчитываются по (5).



Например, вычислить 1-й треугольник ряда *D2:*

*d= c+ d = 1 + 1 = 2; c= 2d + 1 = + 1 = 9; c = 3.*



*X = 2d (c+d ) = 2\*2(3+2) = 20; Y = c(c+2d ) = 3(3+2\*2 ) = 21;*

*Z = c(c+2d )+ 2d= 3(3+2\*2)+2\*2= 29.*



Следующим является треугольник 2 ряда *D1:*

*c= c+ d = 3 + 2 = 5; d= 2c* – *1 = 2\*25 – 1 = 49; d = 7.*



*X = d(2c+d) = 7(2\*5+7) = 119; Y = 2c(c+d) = 2\*5(5+7) = 120;*

*Z = 2c(c+d) + d= 2\*5(5+7)+7= 169.*



Формулы (4) могут быть использованы для доказательства большой теоремы Ферма, методом бесконечного спуска, для всех нечётных (в т.ч. всех простых > 2) значений показателя степени n.