## НА ЧЕМ СТОИТ МАТЕМАТИКА

Н.И. Кривохатько

*Математика - это то, посредством*

*чего люди управляют природой*

*и собой.*

*А. Н. Колмогоров.*

Не будет преувеличением сказать, что, начиная с 17 века, наука превратилась в доминирующий, стремительно набирающий вес фактор развития общества. Наука позволяет находить оптимальные решения в различных ситуациях, указывает пути исследования еще не решенных проблем, подсказывает, куда в данный момент целесообразнее всего направить силы и средства. В большинстве своем мы безоговорочно верим в мощь науки и ее непогрешимость.

Но насколько оправдана такая уверенность (местами даже вера)? Насколько в действительности совершенны инструменты науки и непогрешимы ее выводы? Возьмем на себя смелость усомниться в этом. И в оправдание этих сомнений приведем одно рассуждение. Речь в нем пойдет не о неадекватности какого-то конкретного подхода в какой-то прикладной науке - нет, темой исследования станет предполагаемое внутренное несовершенство науки, которая сама является критерием строгости и как бы даже "научности" любой другой науки. Речь пойдет о математике, причем о самих ее истоках, о тех ее представлениях, которые сложились в незапамятные времена и в течение столетий (точнее, даже тысячелетий) являлись ее незыблемым фундаментом - речь пойдет о числах, о смысле чисел как таковых и способах их представления.

Понятие числа находится в основании математики и ее применений. Отсюда, вопрос логического обоснования данного понятия является чрезвычайно важным для всей математики. Но обоснование чисел любого вида сводится в конце-концов к обоснованию понятия натурального числа. Существует много теорий натурального числа, но каждая из этих теорий имеет свои недостатки, поэтому вопрос логического обоснования понятия числа нельзя считать окончательно разрешенным.

Понятие числа отличается от многих других понятий математики своей первичностью. Это означает, что в преобладающем большинстве логических построений математики понятие числа относится к разряду тех понятий, которые не определяются через другие понятия, но вместе с аксиомами входят в состав первичных данных. Это означает, что математическая наука не содержит в себе ответа на вопрос "Что такое число?" - такого ответа, который заключался бы в определении этого понятия через другие, ранее установленные понятия; математическая наука дает этот ответ в иной форме, перечисляя свойства чисел, выраженные в аксиомах.

Но чем, скажем так, определяется "неопределяемость" понятия? С одной стороны, любое определяемое сейчас понятие в свое время было неопределяемым (чаще в том смысле, что отсутствовало вообще), но позже, в процессе развития познания, определения появлялись. С другой стороны, неопределяемость - это тоже как бы определение, но определение скорее состояния познания в контексте его возможностей. Следовательно, определяемость любого понятия зависит от возможностей познания, которые различны на каждом конкретном этапе развития общества. Но в ситуации, когда возможностей не хватает, а делать что-то надо, мы поступаем просто - используем первое, что дает хоть какое-то решение проблемы. Поэтому и в синтезе самих оснований математики - представлений о числе и построении числовых множеств присутствовал (и присутствует до сих пор) пусть спонтанный, пусть объективно обусловленный, но - произвол. Это утверждение мы также попробуем обосновать в данной работе.

Мы вправе спросить: а возможно ли в принципе существование неопределяемых понятий? При общепринятых способах изложения оснований математики неопределяемые понятия (число, точка и т. д.) возникают как бы из ничего, из пустоты. Но ведь законы мироздания универсальны, поэтому и в области построения и преобразования формальных понятий должен действовать закон, аналогичный закону сохранения вещества: ничего нельзя построить из ничего, из пустоты. Поэтому мы можем утверждать, что возникновение "неопределяемого" понятия числа тем не менее было обусловлено существованием каких-то более общих представлений: пусть не математических, а качественно иного смыслового ряда; пусть не оформленных логически, вербально, но существующих, тем не менее, реально. Именно содержание таких представлений (общих представлений о структуре действительности) обусловило в свое время "отрыв" числа от материального носителя.

Знакомство с математикой традиционно начинается с построения числовых множеств, а основным рабочим образом, используемым для этой цели, является прямая линия - числовая ось. Числа на такой прямой изображаются точками. Ничто не мешает нам определить точки, изображающие числа на числовой оси, как узлы некой одномерной сети, а промежутки между точками - как связи между этими узлами. Узлы и связи между ними образуют систему. Любая система обладает конкретной конфигурацией - структурой, а структура - это не что иное, как пространство. Таким образом, построение числовых множеств и изображение их элементов точками на числовой оси является не чем иным, как конструированием некоего пространства. Исторически первым пространством, сконструированным таким образом, было пространство натуральных чисел.

Натуральные числа - это числа, используемые для счета:

1, 2, 3, 4, ..., n, ...

Натуральные числа образуют множество, называемое множеством натуральных чисел. Множество всех натуральных чисел обозначается символом N:

N = {1; 2; 3; ...; n; ... }.

Множество натуральных чисел является упорядоченным множеством, т. е. для любых двух натуральных чисел m и n имеет место одно из следующих соотношений:

либо m = n;

либо m < n;

либо n < m;

Наименьшим натуральным числом является 1 (единица).

В множестве натуральных чисел вводятся две основные арифметические операции - сложение и умножение. Каждой паре натуральных чисел (n;p) ставится в соответствие натуральное число s, называемое их суммой. Каждой паре натуральных чисел (n;p) можно также поставить в соответствие натуральное число m, называемое их произведением. Таким образом, сумма и произведение любых двух натуральных чисел опять будут натуральными числами. Поэтому говорят, что множество всех натуральных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения.

----\*--------\*--------\*--------\*-- ... --\*-- ...

1 2 3 4 n

Множество целых чисел есть множество, полученное в результате добавления к множеству всех натуральных чисел новых объектов - числа нуль и отрицательных целых чисел. Число нуль, обозначаемое символом 0 и отрицательные целые числа вводятся следующим образом. Сумма любого натурального числа n и числа 0 есть число n:

n + 0 = n;

Любому натуральному числу n соответствует единственное отрицательное число -n такое, что сумма чисел n и -n равна нулю:

n + (-n) = 0;

Число -n называется противоположным числу n. Число, противоположное числу -n, есть число n: -(-n) = n. Натуральные числа в множестве целых чисел называются положительными целыми числами. Множество целых чисел часто обозначается Z.

Множество целых чисел является упорядоченным множеством, т. е. для любых двух целых чисел m и n справедливо одно и только одно из следующих соотношений:

либо m = n;

либо m < n;

либо n < m;

Множество целых чисел замкнуто относительно операций сложения, умножения и вычитания, т. е. для любых двух данных целых чисел существует единственное третье целое число, являющееся их суммой; существует единственное целое число, являющееся их разностью и, наконец, единственное целое число, являющееся из произведение. Относительно операции деления множество целых чисел не является замкнутым - частное от деления целого числа на нуль либо не существует, либо определено не единственным образом.

...--\*-- ... --\*----\*----\*----\*----\*----\*----\*-- ... --\*-- ...

-n -3 -2 -1 0 1 2 3 n

Рациональные дроби появились, как форма записи чисел, более "мелких", нежели натуральные. Рациональную дробь записывают в виде m/n, где целое число m называют числителем дроби, а целое число n не равное нулю - ее знаменателем.

Натуральные числа, целые числа, рациональные дроби и нуль образуют множество рациональных чисел. Рациональное число - это такое число, которое может быть представлено в виде m/n, где |m| и n - взаимно простые (несократимые) натуральные числа. В случае, когда m не делится на n нацело, частное от деления m на n представляет собой не совпадающее ни с каким целым числом рациональное число.

Всякое рациональное число m/n может быть представлено либо в виде конечной, либо в виде бесконечной периодической дроби; обратно, любая конечная, а также любая бесконечная периодическая десятичная дробь есть запись некоторого рационального числа.

Последнее утверждение (особенно в части, касающейся бесконечных десятичных периодических дробей) вызывает определенные сомнения, суть которых будет изложена ниже. Сейчас же продолжим тему цитированием фрагмента текста из учебника Н. Н. Лузина "Дифференциальное исчисление" (Москва, "Высшая школа", 1961 г.).

"Считается, что одних только рациональных чисел вполне достаточно для нужд измерительной практики, ибо они позволяют выполнять измерения с какой угодно степенью точности. Но одних только рациональных чисел становится уже недостаточно, когда надо решать вопросы геометрии, механики и теоретической физики с абсолютной точностью, ибо здесь необходимо уже знание так называемых иррациональных чисел. Как возникают эти новые числа и как их следует понимать?

Последовательность рациональных чисел сама по себе есть всюду плотная, ибо между двумя такими числами - какими бы близкими друг к другу они ни были - всегда можно найти сколько угодно промежуточных рациональных чисел. Поэтому-то на первый взгляд и кажется, что для каких-нибудь новых чисел в последовательности рациональных чисел как будто совсем не остается никакого места.

Однако указанное первое впечатление оказывается глубоко ошибочным, потому что в последовательности рациональных чисел повсюду имеются просветы, как это становится ясным, когда сопоставим последовательность всех рациональных чисел с последовательностью точек на прямой линии.

----------\*===================\*----------

O a M

Чтобы осуществить такое сопоставление, возьмем прямую линию бесконечную в обе стороны, на ней выберем начальную точку O и примем определенную единицу длины для измерения отрезков. Очевидно, всегда можно построить отрезок, имеющий своею длиною любое заранее заданное рациональное число a и нанести его вправо либо влево от O, смотря по тому, будет ли a положительно или отрицательно. Таким образом мы получили определенную концевую точку M, которую можно рассматривать как точку, соответствующую рациональному числу a. Следовательно, можно сказать, что всякому рациональному числу соответствует одна и только одна точка на прямой.

Полученную точку M мы изображаем черной и непрозрачной; она-то и сопоставляется с взятым рациональным числом a, называющимся абсциссой точки M. Когда это проделано со всяким рациональным числом a, прямая окажется покрытой густой сетью черных непрозрачных точек M, как бы осевших на прямой и населяющих - без пустот - каждый ее участок, т. е. отрезок, где бы он ни лежал и как бы мал он ни был. У всякой из этих точек M имеется своя абсцисса a, являющаяся рациональным числом. Чем больше арифметически, т. е. беззначно, величина абсциссы a, тем дальше от начала O лежит точка M.

Это и есть искомое нами сопоставление последовательности рациональных чисел с точками прямой, при котором все точки M полученной черной непрозрачной сетки имеют, очевидно, совершенно такое же взаимное расположение друг относительно друга, какое имеют между собой их рациональные абсциссы a. Конец M всякого отрезка OM, соизмеримого с взятой единицей длины, заведомо содержится в сети, ибо такая точка M имеет рациональную абсциссу. Точки с рациональными абсциссами мы, для краткости речи, будем называть просто рациональными точками и составленную из таких точек сеть будем называть тоже рациональной сетью.

Если бы каждая точка прямой оказалась содержащейся в построенной нами сети, т. е. если бы совсем не существовало никаких несоизмеримых отрезков, тогда все дело обстояло бы необыкновенно просто: в этом случае каждая точка нашей прямой имела бы рациональную абсциссу и, значит, мы не имели бы ни малейшей нужды в каких-либо новых числах, ибо тогда одних только рациональных чисел было бы достаточно для выражения всех теоретических соотношений.

Но действительность оказывается гораздо сложнее, и одним из великих открытий, сделанных в глубокой древности, является установление наличия отрезков, несоизмеримых с данной единицы длины. По-видимому, первым примером этого рода была диагональ квадрата, сторона которого принята за единицу длины.

Отложив такой отрезок от начала O, мы получим точку M, которая не соответствует никакому рациональному числу и у которой, строго говоря, пока нет никакой абсциссы.

-------\*===================\*=======\*-------

O 1 M

А так как имеется бесчисленное множество различных длин, несоизмеримых с единицей масштаба, то прямая линия оказывается в бесконечное число раз больше богатой своими точками, чем последовательность рациональных чисел своими числами. Значит, рассматриваемое сопоставление точек и чисел вынуждают нас признать некоторую неполноту в последовательности рациональных чисел, тогда как прямой линии мы приписываем всю полноту и абсолютное отсутствие каких-либо просветов, т. е. сплошность или непрерывность.

Поскольку последовательность рациональных чисел оказывается недостаточной, является необходимость в пополнении нашей последовательности чисел таким образом, чтобы она получила такую же сплошность, т. е. полноту или непрерывность, как и сама прямая линия. Это достигается введением иррациональных чисел, определяемых лишь при посредстве рациональных чисел.

Итак, мы пришли к следующему положению: иррациональные числа совершенно заполняют все просветы, имеющиеся в последовательности рациональных чисел, т. е. мы принимаем, что всякой точке прямой соответствует число, рациональное или иррациональное, называемое абсциссой этой точки, и обратно.

Арифметически же иррациональные числа могут быть представлены в виде бесконечных десятичных дробей.

Возводившееся веками здание современной математики (здание, фундаментом которого является представление о числе) выглядит столь грандиозным и совершенным, что сама мысль о наличии в этом фундаменте изъянов кажется кощунственной. Уж точно кощунственным прозвучит утверждение, что все это циклопическое сооружение опирается на ложные представления - представление о "сплошности" (бесструктурности) математической прямой (хорошо известной нам числовой оси) и представление о бесструктурности математической точки. Очевидно, эти представления сформировались на основе других, более общих представлений о свойствах материи - о существовании в природе бесструктурных объектов - атомов. В этом можно увидеть признак определенного рода инерции нашего мышления. Ведь несмотря на то, что около века известен установленный факт о наличии у атома сложной структуры, мы по-прежнему зовем эти объекты атомами, т. е. "неделимыми". Но только ли в инерции дело? Скорее всего, дело здесь в дефиците принципиально новых, адекватных представлений о свойствах материи. Существует и еще одна причина появления ложных представлений о свойствах математической прямой - о ее "сплошности" и она заключается в следующем. Как уже упоминалось, числа возникли из практической потребности в счете и в оном качестве они существовали в течение довольно длительного промежутка времени. Но на определенном этапе эволюции представлений о числе произошел качественный скачок - т. н. "отрыв" числа от материального носителя. Это и обусловило появление абстрактных, идеальных объектов с произвольно приписанными им свойством "сплошности", т. е. бесструктурности - математической прямой и математической точки.

Манипуляции с объектоми, обладающими несуществующими свойствами не проходят даром, результатом их оказывается появление ложных объектов, таких, например, как бесконечные периодические и непериодические дроби, т. е. часть рациональных и все иррациональные числа. Эти математические объекты принципиально нельзя назвать числами, в рамках действия принципа структурной организации материи числа и обозначенные объекты имеют разный системный смысл. В чем заключается эта разница и что в таком случае представляет собой собственно число? Попробуем - хотя бы бегло, разобраться в этом.

Примем за точку отсчета утверждение, что первоначально числа возникли из потребности счета различных предметов. Что, по сути, являет собой процесс счета, как его можно описать?

Пусть мы имеем какое-то количество предметов, которые нам необходимо сосчитать. Абстрагируемся от всех конкретных свойств этих предметов, кроме двух: самого факта существования такого предмета и наличия у него внутренней структуры. Представим процесс счета как "нанизывание" наших предметов на какую-то условную нить. В результате подобной процедуры каждый такой предмет найдет на этой нити свое место. Если теперь мы вытянем эту нить в струну, то получим аналог математической прямой как некой идеальной системы, некоего одномерного идеального пространства. Каждому узлу в этой одномерной сети (идеальному аналогу реального предмета) можно сопоставить уникальный символ для его идентификации. Самым удобным в этом смысле является число, т. к. оно характеризует наиболее общее системное свойство каждого такого предмета - его место в упорядоченном (в отличие от обычного, неупорядоченного) множестве - пространстве.

Итак, мы приняли, что число - это информационный идентификатор места объекта в системе, в случае, если этот объект рассматривается в качестве элемента такой системы. Очевидно, при таком подходе для манипуляций с числами нет никакой необходимости "отрывать" их от материальных объектов - вместо этого появляется возможность манипулировать самими идеализированными объектами, тем самым осуществляя преобразования нашего идеального пространства. Этот момент чрезвичайно важен для построения новой физики - физики, которая рассматривает материальные объекты и явления как разнообразные деформации структуры физического вакуума.

Но пойдем дальше. Важнейшей особенностью построенного нами идеального пространства (как и любого пространства) является его структурность. В структуру нашего пространства входят элементы двух видов: те, которые соответствуют узлам и те, которые соответствуют связям между ними, но вместе они образуют целостную структуру. Таким образом, рассматриваемое пространство одновременно и сплошное, непрерывное и дискретное - в смысле неоднородности. Такое пространство совпадает с известным нам множеством натуральных чисел, изображаемых точками числовой оси.

------\*-------\*-------\*-------\*- ...-\*---- ...

1 2 3 4 n

Математика определяется как наука, которая изучает действительный мир со стороны пространственных форм и количественных отношений. В этом смысле математическая прямая представляет специфическую модель этого мира, т. к. является одновременно и простейшей пространственной формой и вместилищем количественных отношений. Но насколько адекватной является такая модель в контексте существования структурной организации мира? Ответ следующий: она существенно неадекватна, потому что изначально задана как бесструктурный, "сплошной" объект. И традиционный алгоритм построения числовых множеств совершенно не отражает принцип структурности мира.

Структурность (или системность) мира предполагает иерархичность его организации, иначе это не системность. Смысл иерархичности понятен - каждый объект рассматривается как элемент какой-то системы и в то же время как система, каждый элемент которой также является системой, каждый элемент которой, в свою очередь, рассматривается как система, каждый элемент которой и т. д. до неизвестного нам предела (или, скорее всего, осмысления отсутствия последнего).

Какой ход рассуждений в обосновании логики понятия числа с учетом структурности мира можно считать более корректным? Попробуем рассуждать следующим образом. Вернемся к пространству, которое мы построили. Основными объектами нашего внимания являются узлы этой одномерной сети - абстрагированные от конкретных свойств предметы счета, фрагменты условной нити лишь связывают их. Узлы, как мы уже оговорили, имеют внутреннюю структуру. Отразим этот момент графически.

=======-=======-=======-=======- ... -=======- ...

1 2 3 4 n

Узлы на этой прямой растянуты - что дает нам возможность дробить их на фрагменты и изображены жирными отрезками. Связи - тонкими, поэтому здесь они имеют вид своеобразных промежутков, щелей между узлами и носят второстепенный характер. Таким образом, мы получили те же два основных вида элементов, что и на традиционной прямой, но манипулируя с точками жирных отрезков, мы как бы тем самым манипулируем элементами систем (объектов счета), которые они изображают. Измерение различных величин, изображаемых отрезками, в этом контексте можно рассматривать как сравнение систем.

Итак, мы несколько видоизменили математическую прямую: мы растянули узлы, чтобы стала доступной для манипуляций их структура, постулировали изначальную структурность прямой, введя в ее состав элементы двух качественно различных видов (что совершенно не противоречит принципу структурности мира) и тем самым как бы построили новое пространство, элементы которого идентифицировали натуральными числами. Логика обоснования нашего натурального ряда не противоречит логике построения традиционной числовой оси.

В традиционном алгоритме построения числовых множеств после построения множества натуральных чисел следует введение отрицательных чисел и нуля и формирование нового числового множества - множества целых чисел. Но мы эту фазу детально рассматривать не будем, т. к. она не имеет сколько-нибудь существенного значения для достижения нашей цели. Понятно, что знак числа - это условность, которая зависит от выбора точки отсчета (нуля) на числовой оси и направления движения по этой оси (счета). Практическая иллюстрация этого следующая. Если некие предметы (аналоги которых узлы на числовой прямой, обозначенные числами 1, 2, 3, ... , n) составляют для кого-то прибыль и имеют положительное значение (знак "+"), то для кого-то они автоматически означают убыток - пусть не в коммерческом, но в математическом и физическом смысле, а значит, заклеймены знаком "-". Для наших целей достаточно положительной полуоси математической прямой.

Но пойдем дальше, или точнее - вглубь, к множеству рациональных чисел. Рациональные числа рассматривают как пополнение множества целых чисел рациональными дробями - конечными и бесконечными периодическими. Как нам известно, дроби возникли из необходимости измерять величины, не кратные выбранному эталону (на числовой оси - единичному отрезку). Процедура измерения заключается в сравнении измеряемого объекта с эталоном - другим объектом и обосновании вывода об их равенстве или неравенстве. Этот вывод зависит от того, что мы понимаем под равенством или неравенством объектов.

Какие-то представления о равенстве, полученные из жизненной практики, есть, пожалуй, у каждого. Если, например, мы совмещаем некие протяженные предметы и их пространственные границы (попросту говоря, концы) совпадают, то говорят, что длины этих предметов равны. Подобным образом мы можем сравнивать и плоские и объемные фигуры, веса... Принцип сравнения везде один и он заключается в сопоставлении сравниваемых объектов через сопоставление их элементов. Хоть при этом неизбежно приходится допускать равенство элементов - а это опять условность. Как этот процесс - процесс измерения, можно изобразить наглядно и как это делается традиционно?

Возьмем фрагмент числовой прямой, состоящих из нескольких отрезков, эквивалентных единичному.

\*-------\*-------\*-------\*-------\*

0 1 2 3 4

\*-------------------\*

В соответствии с традиционными представлениями о числовой оси в любом ее месте мы можем обнаружить точку. Это означает, что какой бы отрезок прямой мы ни взяли, его пространственные границы (концы) будут представлены точками. Далее возьмем отрезок, который мы собираемся измерять и концы которого также ограничены точками. Теперь совместим эталонный и измеряемый отрезки. Если точки, обозначающие концы измеряемого отрезка и отрезка, кратного единичному на эталонном отрезке, совпадают, мы делаем вывод о равенстве этих отрезков. Но это, конечно, происходит не всегда, чаще всего пограничные точки эталона и сравниваемого отрезка не совпадают. Предположим, что он оказался короче и его правый конец находится где-то между точками 2 и 3 эталона. Следовательно, теперь необходимо измерить ту часть отрезка, которая не совпадает с эталоном. Для этого мы разделим каждый единичный отрезок эталона на равное число частей (традиционно на десять) и повторим операцию совмещения.

\*----+----+----+----+----+----+----+----+----+----\*

(2) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3)

\*-------------------------------------\*

Если пограничный узел (конец) измеряемого отрезка совпадет с какой-то из дробных точек эталонного отрезка, то процесс измерения можно считать законченным, если нет - цикл дробления с последующим измерением повторяется уже на отрезке [7,8] и т. д. Утверждается, что возможны два варианта развития событий. Или в конце-концов на каком-то этапе дробления найдется точка, с которой совпадет граничный узел измеряемого отрезка - и тогда мы эту точку (абсциссу этой точки) идентифицируем как конечную рациональную дробь. Или же в какой-то момент мы приходим в точно такое же место малого отрезка (соотносительно с большим отрезком), с которого мы начинали дробление. Возникает вопрос: что это за место, какова его природа? Ведь если бы это была точка, процесс измерения можно было бы считать законченным, однако этого не происходит. Цикл дробления повторяется на ту же глубину шагов и все его фазы будут идентифицированы теми же числами. Пока опять мы не придем в такое же место соответствующего отрезка и т. д. и т. д. В этом случае говорят, что получена бесконечная периодическая дробь. Вот только совершенно неправильно причислять ее к множеству рациональных чисел - да и чисел вообще. Этот процесс не может называться числом - ведь точка прямой, соответствующая пограничному узлу данного отрезка, так и не найдена. Но если это не точка, то что же? Для того, чтобы найти если не ответ, то хотя бы путь к ответу, проведем эти же рассуждения, но применительно к новому пространству - тому, где узлы растянуты и изображены не точками, но жирными отрезками и отделены друг от друга структурными "щелями".

\*=======\*-\*=======\*-\*=======\*-\*=======\*

1 2 3 4

\*----------------------------\*

Главной особенностью предшествующих наших рассуждений была убежденность, что какой бы длины не оказался измеряемый отрезок, его граничная точка всегда в конце-концов совпадет с точкой - именно с точкой - числовой оси. Эта убежденность базируется на представлении о "сплошности" прямой. Но мы знаем, что прямая, понимаемая как структура (а она не может не быть структурой), содержит элементы двух видов, в системном контексте условно понимаемые как "узлы" и "связи" между ними. Тогда возникает вопрос: почему конец измеряемого отрезка непременно должен совпасть с точкой эталона, а не с промежутком между точками? С промежутком, "щелью", которая ведет в неизведанные глубины структуры - да, структуры модели, но в системном смысле адекватной модели мира. Может, то что мы считаем бесконечной периодической дробью и есть такой путь?

Сходным свойством обладает процесс, который математика определяет как иррациональное число. Иррациональные числа дополняют множество рациональных чисел до множества действительных чисел. Существуют разные способы построения этого числового множества. Один из них основан на использовании фундаментальной последовательности рациональных чисел. Множество всех действительных чисел в этом случае получается пополнением множества рациональных чисел новыми числовыми объектами, называемыми иррациональными числами, которые являются пределами всевозможных фундаментальных последовательностей рациональных чисел. По поводу этого определения можно сказать, что предел - это скорее процесс, чем число; процесс, уводящий нас в недра структуры. Проникнуть же в недра можно лишь по какому-то каналу. Единственной кандидатурой на роль такого канала является один из двух элементов, составляющих структуру пространства - промежутки между "узлами", они же "щели".

Второй способ получения иррациональных чисел (но первый исторически) осуществляется с помощью "поворота" диагонали единичного квадрата (описание этого способа приведено выше). Что можно сказать по поводу этого способа? Числовая ось - это конечный объект, замкнутый относительно преобразований (все результаты преобразований этого объекта должны принадлежать объекту). Но что в таком случае являет собой диагональ единичного квадрата? Ее можно рассматривать как единичный отрезок другой прямой, другого пространства, пересекающегося с первым. Но использование этого пространства опять же является произволом, т. к. никакого отношения к первому оно не имеет. И эти пространства действительно несоизмеримы - а почему они должны быть соизмеримы? Но из факта несоизмеримости никак не вытекает существование в структуре первого пространства (числовой оси) бесконечного количества каких-то специфических объектов, идентифицируемых как иррациональные числа.

Зададим вопрос: а существует ли (с учетом сказанного) реальная необходимость вводить какие-то особые числа, кроме натуральных? Традиционная математика утверждает, что числовая прямая бесконечна, но реально никто и никогда не использует всю бесконечную прямую: мы всегда работаем с какой-то ее конечной частью, по сути - с отрезком. В рамках этой же математики утверждается, что самая ничтожная часть прямой, самый малый ее отрезок, тоже бесконечны. Но если следовать этой же логике, то любой отрезок прямой мы можем рассматривать в качестве самостоятельной прямой, такой же, как и исходная (эквивалентность части целому). А любые две соседние точки такой прямой ничто не мешает рассматривать как концы единичного отрезка и обозначать числами натурального ряда. Отсюда можем сделать вывод, что некоторые построенные нами числовые множества носят, в общем-то, условный характер.

Подобные рассуждения мы могли бы привести в отношении другого математического объекта - точки. Дело в том, что математика некоppектно использует некоppектный теоpетический констpуктоp, каковым, по сути, в математике является точка.

Теоретический конструктор - это некоторое базисное явление, обладающее возможностью идеального представления. Наука, имеющая конструктор, обладает возможностью строить различные модельные ситуации и предсказывать новые. В науке, где есть конструктор, ее границы задаются возможностями этого конструктора: такая наука изучает любые объекты, модели которых может построить в рамках своего конструктора. Пример теоретического конструктора - атомно-молекулярные представления в химии.

Математика, как известно, начинается с постpоения числовых множеств. В качестве основного элемента любого такого множества используется так называемая математическая точка. Что это за объект, каков самый главный его пpизнак? Таковым является бесстpуктуpность (по Эвклиду, точка есть целое без частей, а введенное позже такое ее опpеделение как "бесконечно малый нематеpиальный объект" сути пpоблемы не меняет). А что такое бесстpуктуpный объект? Каков смысл этого теpмина? Поскольку по-настоящему бесстpуктуpных объектов в пpиpоде попpосту не существует, мы получаем некую замкнутую сущность, о котоpой нам pовным счетом ничего неизвестно. Манипулиpовать таким объектом пpинципиально невозможно, и наши pассуждения должны были бы закончиться тотчас после деклаpации бесстpуктуpности. Но не тут-то было - в математике с этого все только начинается. Из точек мы стpоим пpямую, то есть неизвестно, на каком основании пpедполагаем у совеpшенно неопpеделенных объектов наличие опpеделенных свойств, способности вести себя абсолютно конкpетным обpазом, специфически взаимодействовать. Но математика не останавливается на этом. Получив ряд натуральных (а с введением отрицательных значений - целых) чисел, она заполняет промежутки между этими точками (коих бесконечно много) еще бесконечным количеством точек, образуя множество национальных чисел. Далее, обнаружив существование несоизмеpимых отpезков, математика фоpмиpует новое бесконечное множество - множество вещественных чисел, добавляя в уже дважды бесконечное множество точек еще одно бесконечное множество. Тем самым она получает плотное множество (между точками этого множества "щелей" уже нет) или множество мощности континуум. Но любая система состоит из элементов и связей между ними, то есть между элементами и связями (котоpые в pавной степени являются компонентами системы) все же должно быть какое-то качественное pазличие. Тем самым любой объект, обладающий стpуктуpой, должен быть хоть в каком-то аспекте неодноpодным (качественно неодноpодным!). Но что же в таком случае мы получаем в качестве множества мощности континуум? Да тот же самый бесстpуктуpный объект, о котоpом, по логике вещей, нельзя сказать ничего, кpоме того, что он состоит из бесконечного множества объектов, о котоpых нельзя сказать ничего. Связность, котоpой хаpактеpизуется множество действительных чисел, носит здесь чисто искусственный, волевой хаpактеp. Неудивительно поэтому возникновение в математике таких паpадоксов (в действительности - квазипаpадоксов), как эквивалентность части целому. Паpадокс возникает потому, что в пpинятой логике pассуждений часть бесконечного множества также является бесконечным множестов. Но что такое множество мощности континуум? Может быть, это та же точка, только pассматpиваемая изнутpи? Тогда пpи коppектном pассмотpении паpадокса не часть отобpажается на целое, а один бесстpуктуpный объект отобpажается на дpугой такой же. Скоpее всего, это точка отобpажается на точку же, и никакого паpадокса попpосту не существует.

Подведем итоги проделанной работе. Как видим, даже поверхностный анализ позволяет обнаружить некорректность в логическом обосновании таких понятий и объектов математики, как число, точка, числовая прямая. Эта некорректность заключается в неверном истолковании и использовании (с точки зрения современных представлений) такого важнейшего свойства действительного мира, как его структурность. Конкретно это проявляется в произвольном присваивании точке и числовой прямой таких свойств, как "сплошность" (иначе - бесструктурность).

Причины, обусловившие описываемое положение вещей в математике, понятны. Их корни находятся в самых глубоких закономерностях человеческих представлений об устройстве мира. В качестве первой такой причины можно назвать то, что представления о цельности, "сплошности" материальных объектов исторически возникли намного раньше представлений о их структуре. А в те времена, когда закладывались основы математики, они доминировали в мышлении людей. Левкипп лишь отодвинул представления о неделимости в глубины строения материи, дав понятие атома. Это оказало свое воздействие на воззрения античных математиков.

В роли второй причины, повлиявшей на развитие познания в рассматриваемом контексте, выступило следующее обстоятельство. На становление науки - в том числе математики - оказывало существенное влияние развитие представлений о пространстве. Так вот, в развитии представлений о пространстве и понятии пространства можно выделить один очень важный этап, собственно, даже качественный скачок, сыгравший в этом процессе весьма значительную роль.

Зададимся вопросом, каков смысл категории "пространство". В своей деятельности мы обнаруживаем такие особенности структурной организации мира, что части и элементы, из которых построены материальные объекты, определенным образом расположены друг относительно друга, образуют некоторые устойчивые конфигурации, что задает границы объекта по отношению к окружающей среде. Можно сказать, что каждый объект характеризуется своеобразной "упаковкой" входящих в него элементов, их расположенностью относительно друг друга, и это делает любые объекты протяженными. Кроме того, каждый объект занимает какое-то место среди других объектов, граничит с ними.

Все эти предельно общие свойства, выражающие структурную организацию материального мира, - свойства объектов быть протяженными, занимать место среди других, граничить с другими объектами - выступают как первые, наиболее общие характеристики пространства. Кто-то когда-то решил, что если эти характеристики абстрагировать из действительности, отделить от самих материальных объектов, то мы получим представление о пространстве как таковом. Шаг, в общем-то, абсолютно закономерный (в силу диалектичности познания), но вот, к сожалению, перечисленных характеристик для полноты представлений о пространстве, как таковом, явно недостаточно.

Точка и математическая прямая являют собой абстракцию, идеализацию именно такого рода - идеализацию несовершенных представлений человека об устройстве мира. Основные характеристики объекта, постигнутого очень поверхностно, были абстрагированы, отделены от материальных носителей и начали самостоятельную жизнь. Тем самым как бы законсервировав в себе несовершенство наших представлений о мире. А это не могло не привести к парадоксам - и не только в науке.

Обнаружившееся положение вещей в одной из самых древних и консервативных наук - математике, это, пожалуй, повод задуматься о качестве нашего мышления в целом. И (что особенно актуально) связать это качество с теми негативными процессами, которые происходят сейчас в мире людей. Но последнее относится уже не столько к причинам возникновения некорректных методов познания, сколько к последствиям их применения. О последних же нужно говорить отдельно - насколько их много и насколько они весомы. Скорее всего, все последствия можно осмыслить лишь после создания альтернативной математики (а эта возможность вполне реальна).

Сейчас же завершим наше исследование следующим выводом. Основные свойства реального пространства - а значит реального мира, не соответствуют нашим представлениям о нем. Но мы живем и действуем в этом мире, а действовать, опираясь на ложные представления - это все равно, что путешествовать, используя неверно составленную карту. Это значит, совершать ошибки. Вся наша история свидетельствует о том, что мы их совершаем.

Но самые крупные плоды в этом саду лишь начинают созревать.

**Список литературы**

1. Глейзер Г. И. История математики в школе. М., "Просвещение", 1983.

2. Мантуров О. В. Математика в понятиях, определениях и терминах. Киев, "Радянська школа", 1986.

3. Ляпин Е. С. Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел. Москва, "Просвещение", 1974.

4. Бухштаб А. А. Теория чисел. Москва, "Учпедгиз", 1960.

5. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление. М., "Высшая школа", 1961.

6. Андронов И. К. Арифметика рациональных чисел. Москва, "Просвещение", 1971.

7. Соколов Э. Т. Кентавр, или как математика помогает физике. Минск, "Вышэйшая школа", 1988.

8. Фор Р. Кофман А. Современная математика. Москва, "Мир", 1966.