**О физической значимости векторных потенциалов в классической электродинамике**

В.В. Сидоренков

Общепринято считать, что явления электромагнетизма физически полно представлены векторными электромагнитными полями, свойства которых исчерпывающе описываются системой электродинамических уравнений, сформулированных в окончательной форме Максвеллом [1]. При этом непосредственно следующие из уравнений Максвелла векторные потенциалы указанных полей как физическая реальность не рассматриваются, и им отводится роль вспомогательных математических функций, в ряде случаев существенно упрощающих вычисления. Такой взгляд на векторные потенциалы обусловлен взаимно неоднозначной связью полей и их потенциалов, не допускающей прямых измерений последних, и, что еще более важно, использование векторных потенциалов в рамках электромагнитных уравнений Максвелла не приводит в явном виде к дополнительным, не известным прежде следствиям.

Однако к настоящему времени исследованиями в области электродинамики, квантовой механики, сверхпроводимости достоверно установлено, что в фундаментальных уравнениях должны фигурировать не поля, а именно их потенциалы. В частности, эффекты Ааронова-Бома, Джозефсона, Мейснера реализуются в поле магнитного векторного потенциала [2], проявляющего себя тем самым вполне наблюдаемой физической величиной. Известно предложение о применении поля указанного вектор-потенциала в технологиях обработки разного рода материалов [3]. Отметим также сообщение [4], где на основе формального использования представлений о векторных потенциалах металлического проводника с током сделано утверждение о том, что в проводник при электропроводности вместе с потоком вектора электромагнитной энергии Пойнтинга поступают потоки чисто электрической и чисто магнитной энергии, момента электромагнитного импульса, возникающие в таких условиях в электромагнитном поле. Таким образом, налицо серьезная проблема, для решения которой необходимо должным образом проанализировать известные либо сформулировать новые физические представления о роли и месте векторных потенциалов в явлениях электромагнетизма.

В настоящей работе проведена модификация уравнений электромагнитного поля Максвелла для электрического и магнитного векторных потенциалов, и на основе анализа физического содержания полученных уравнений показано, что, наряду с традиционными полями в электродинамике, их векторные потенциалы являются полноправными физически значимыми полями, существенно расширяющими представления об электромагнитных полевых процессах.

Для решения поставленной задачи, прежде всего, рассмотрим саму систему электродинамических уравнений Максвелла [5] в дифференциальной форме:

(a) rot, (b) div, (c) rot, (d) div, (1)

включающую в себя материальные соотношения:

, , , (2)

описывающие отклик среды на наличие в ней электромагнитных полей. Здесь  и  - векторы напряженности электрического и магнитного полей, связанные посредством соотношений (2) с соответствующими векторами индукции и ,  - вектор плотности электрического тока, ρ - объемная плотность стороннего заряда, ε0 и μ0 - электрическая и магнитная постоянные, σ, ε и μ - удельная электрическая проводимость и относительные диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, соответственно. Принципиальная особенность этих динамических релятивистски инвариантных уравнений (1) состоит в том, что в их структуре заложена отражающая обобщение опытных данных основная аксиома классической электродинамики - неразрывное единство переменных во времени электрического и магнитного полей.

Фундаментальным следствием уравнений Максвелла является вывод о том, что описываемое ими электромагнитное поле перемещается в пространстве в виде волн, скорость которых определяется лишь электрическими и магнитными параметрами среды, заполняющей это пространство (например, в отсутствие поглощения ). Совместное решение уравнений системы (1) позволяет также ответить на вопрос, что переносят эти волны и получить аналитическую формулировку закона сохранения электромагнитной энергии:

rotrot=div=, (3)

согласно которому поток электромагнитной энергии компенсирует в данной точке среды джоулевы (тепловые) потери при электропроводности и изменяет электрическую и магнитную энергию. При этом характеризующий энергетику данного факта вектор Пойнтинга плотности потока электромагнитной энергии , связанный с вектором плотности электромагнитного импульса 2, отличен от нуля только там, где одновременно присутствуют электрическое и магнитное поля, векторы  и  которых неколлинеарны.

Таким образом, в рамках уравнений (1) в принципе невозможно представить раздельное существование чисто электрических либо магнитных волн, переносящих только электрическую или магнитную энергию. Кроме того, далеко не ясен вопрос о физической реализации момента импульса электромагнитного поля, соответственно, переносящих его волн, и каким образом это явление соотносится с уравнениями Максвелла [6]. Чтобы аргументированно прояснить сложившуюся ситуацию, рассмотрим далее вопрос о возможности модификации уравнений электромагнитного поля (1) в виде альтернативных им уравнений для электрического и магнитного векторных потенциалов.

Понятие векторного потенциала следует из очевидного положения о том, что дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю. Поэтому магнитный векторный потенциал  определится посредством соотношения div = 0 системы электромагнитных уравнений Максвелла (1), а электрический  - соотношением div = ρ этой системы при , описывающим поляризацию локально электронейтральной среды:

(а) rot, (b) rot. (4)

Однозначность функций векторного потенциала, то есть чисто вихревой характер такого поля, обеспечивается условием кулоновской калибровки: div = 0.

Тогда подстановка соотношения для магнитного векторного потенциала (4a) в уравнение вихря электрической напряженности системы (1a) приводит к известной формуле [5] связи поля вектора указанной напряженности с магнитным вектор-потенциалом:

, (5)

описывающей закон электромагнитной индукции Фарадея. Отметим, что здесь не рассматривается электрический скалярный потенциал, формально следующий из таких рассуждений: grad φe.

Аналогичная подстановка соотношения для электрического векторного потенциала (4b) в уравнение вихря магнитной напряженности системы (1c) с учетом соотношений (2) позволяет получить формулу связи поля этой напряженности с электрическим вектор-потенциалом:

, (6)

где τрел= εε0 /σ - постоянная времени релаксации электрического заряда в среде за счет электропроводности.

Теперь можно убедиться, что результаты проведенных рассуждений действительно позволяют предложить альтернативу традиционной системе электромагнитных уравнений Максвелла (1). Используя формулы (4a) и (4b) связи полей индукции и их векторных потенциалов, имеем при подстановке в них соотношений (5) и (6) систему динамических уравнений относительно полей только электрического и магнитного векторных потенциалов:

(a) rot, (b) div, (7)

(c) rot, (d) div.

Неординарность уравнений системы (7) вполне очевидна, поскольку в каждом одном роторном уравнении поля векторного потенциала  или  содержится информация о свойствах обоих роторных уравнений электромагнитных полей  и  системы (1). Так, например, если взять ротор от электрического роторного уравнения (7a), то после подстановки в его левую часть соотношения (4b), а в правую (4a) получается также “электрическое” роторное уравнение (1a). Теперь, если взять производную по времени (t) от уравнения (7a) и использовать подстановки соотношений (5) и (6), то оно преобразуется в “магнитное” роторное уравнение (1c). Аналогичные действия с магнитным роторным уравнением (7c) дают в итоге роторные уравнения (1c) и (1а). Дивергентные уравнения системы (7) посредством дифференцирования их по времени преобразуются в соответствующие уравнения системы (1) при ρ = 0.

Об исключительности уравнений векторных потенциалов говорит и тот факт, что дифференцирование по времени только магнитных уравнений системы (7) преобразует ее с учетом вышеизложенного в новую систему уравнений относительно полей электрической напряженности и ее вектор-потенциала:

(a) rot, (b) div, (8)

(c) rot, (d) div.

Соответственно дифференцирование по времени пары уравнений электрического векторного потенциала в системе (7) преобразует ее в другую новую систему уравнений теперь уже относительно полей магнитной напряженности и ее вектор-потенциала:

(a) rot, (b) div, (9)

(c) rot, (d) div.

Сделаем общее для всех систем замечание о дивергентных уравнениях. Как уже говорилось, уравнение div = 0 являются калибровкой, обеспечивающей однозначность функции векторного потенциала , поэтому, согласно симметрии уравнений в рассматриваемых системах, другие дивергентные уравнения: (1b) при , (1d), (8b) и (9b) математически также следует считать соответствующими калибровками для функций вихревых полей  и .

С точки зрения эффективности анализа физического содержания всех представленных уравнений укажем на явную предпочтительность использования в электродинамике системы единиц физических величин СИ в сравнении с абсолютной системой единиц СГС. Размерность в системе СИ множителя ε0 в материальных соотношениях (2) для  действительно оправдана, поскольку тем самым объединяются физически различные электрические величины: линейный (силовой) вектор напряженности  и потоковый вектор смещения . Аналогично, в другом соотношении (2) размерная константа μ0 связывает линейные и потоковые векторные величины: . Напротив, в гауссовой системе единиц безразмерные коэффициенты ε0 = 1 и μ0 = 1 делают векторы  и ,  и  сущностно тождественными, что обедняет физическое содержание соотношений электромагнетизма, оголяя в них формализм “математики”. Физические свойства указанных полей, акцентируемые системой СИ, наиболее полно отражены в электродинамических уравнениях Максвелла (1), где, и Максвелл это особо подчеркивал [1], описываются вихри именно линейных векторов  и , а дивергенция потоковых  и . Кстати, векторные потенциалы  и  по определению являются линейными векторами, а векторы отклика среды на их воздействие  и  - потоковыми.

Судя по симметрии, представленные здесь системы уравнений физически не менее значимы, чем традиционная система (1), поскольку в их структуре также заложено принципиальное неразрывное единство полей электрического  и магнитного  векторных потенциалов в системе (7), полей электрической напряженности  и ее вектор-потенциала  в системе (8), и, наконец, полей магнитной напряженности  и ее вектор-потенциала  в системе (9). При этом каждая из систем вполне автономна и самодостаточна при описании определенного класса физических явлений, строгое обоснование достоверности которых возможно в рамках именно этой конкретной системы электродинамических уравнений Максвелла, понимаемых теперь в значительно более широком смысле. Как видим, полученные результаты несомненно перспективны в плане непосредственного развития физических представлений о роли и месте векторных потенциалов в явлениях электромагнетизма.

Проведем анализ полученных выше систем уравнений, специфика которых состоит в том, что, являясь модификацией уравнений Максвелла электромагнитных полей, они справедливы теперь в таких областях пространства, где присутствуют одновременно поля и их векторные потенциалы, либо только потенциалы. Согласно структуре представленных уравнений, описываемые ими поля распространяются в пространстве в виде волн, скорость которых в отсутствие поглощения определяется электрическими и магнитными параметрами этого пространства: . В этом можно убедиться, взяв, как обычно, ротор от одного из роторных уравнений системы, и после чего подставить в него другое роторное уравнение той же системы. В качестве иллюстрации получим, например, для системы (7) волновое уравнение относительно :

rot rot grad divrot ,

где, согласно (7b), div, а Δ – оператор Лапласа. Таким образом, имеем теперь волновые уравнения не только для электромагнитных полей  и , но и для их векторных потенциалов  и  в парных комбинациях этих четырех уравнений в зависимости от системы. В итоге возникает физически очевидный, принципиальный вопрос: какие это волны, и что они переносят? Другими словами, необходимо прояснить физическое содержание рассматриваемых здесь систем электродинамических уравнений.

В случае системы (8) введем аналогично вектору Пойнтинга плотности потока электромагнитной энергии  другой потоковый вектор , который, судя по размерности, определяет электрическую энергию, приходящуюся на единицу площади поверхности. Для аргументированного обоснования возможности существования такого вектора воспользуемся стандартными рассуждениями, как при выводе соотношения баланса энергии электромагнитного поля (3), и из уравнений системы (8) в итоге получим:

div ( 10)

- уравнение энергетического баланса процесса электрической поляризации среды в данной точке. Как видим, уравнения электрических полей напряженности  и векторного потенциала  системы (8) описывают статические и динамические чисто электрические явления, показывают реальность волн, переносящих только электрическую энергию.

Аналогично можно ввести потоковый вектор , размерность которого определяет поверхностную плотность магнитной энергии. Подтверждение этому найдем из уравнений (9) в виде уравнения энергетического баланса процесса намагничивания среды в данной точке:

div. (11)

Следовательно, уравнения магнитных полей напряженности  и векторного потенциала  системы (9) описывают статические и динамические магнитные явления, устанавливают реальность волн, переносящих только магнитную энергию.

Очевидно, что такие результаты анализа систем (8) и (9) в принципе невозможны и просто абсурдны в рамках традиционной электродинамики Максвелла, но это нисколько не является недостатком системы (1), а лишь иллюстрирует автономию одной системы уравнений по отношению к другим.

Полученные здесь уравнения энергетического баланса (10) и (11) описывают не только энергетику обычной электрической и магнитной поляризации среды с помощью соответствующего поля (первое слагаемое), но и показывают возможность реализации эффектов динамической поляризации вещества посредством изменяющегося во времени поля векторного потенциала, причем наличие электропроводности среды способствует этому. Надо сказать, что явления динамической поляризации вещества, как нам представляется, уже имеют реальное экспериментальное воплощение: это эффекты электродинамической индукции в металлах [7] и динамического намагничивания в ферритах и магнитоупорядоченных металлах [8, 9].

Подобным образом вводится вектор , размерность которого определяет момент импульса на единицу площади поверхности. Соответственно, уравнения (7) позволяют получить уравнение баланса процесса передачи момента импульса поля электромагнитных потенциалов в данной точке среды:

div. (12)

Согласно этому уравнению, проводящей среде момент импульса передается электрическим вектор-потенциалом, стационарным в том числе, а диэлектрической – переменными во времени полями электрического или магнитного потенциалов. Целесообразно отметить, что вектор момента импульса поля электромагнитных векторных потенциалов  никак не может быть сопоставлен с предложенным в порядке гипотезы из механических аналогий вектором момента импульса электромагнитного поля , дискуссия о котором продолжается по сей день [6] и носит, на наш взгляд, тупиковый характер. Итак, уравнения системы (7) описывают необычные волны векторного потенциала, переносящие, согласно (12), момент электромагнитного импульса, которые, однако, в явном виде не переносят энергии, поскольку в них  и  равны нулю. Вопрос о физическом смысле таких волн остается открытым.

Иллюстрацию физической значимости векторных потенциалов в электродинамике продолжим на конкретном примере использования этих понятий при анализе энергетики процесса взаимодействия металла с электромагнитным полем, где главную роль играет высокая электропроводность такой среды. Так как магнитный векторный потенциал  проводника с током подробно обсуждался в работе [2], то далее наши рассуждения будут в большей степени касаться электрического векторного потенциала  проводника с током. Такая инициатива возможна, поскольку в процессе электропроводности однородная проводящая среда остается обычно локально электронейтральной [10, 9], а потому электрическое поле в ней описывается соотношением div. Следовательно, выражение (4b) справедливо и в данном случае.

Выражение rot в применении к проводнику с током для большей наглядности и математической общности представим в интегральной форме:

, (13)

где циркуляция вектора электрического потенциала  по замкнутому контуру С равна потоку вектора электрического смещения  через поверхность SC , опирающуюся на этот контур, то есть определяет величину поляризационного заряда , индуцированного на этой поверхности. Вопрос об электрической поляризации металлического проводника в процессе электропроводности подробно обсуждался в работе [11].

На основе (13) нетрудно получить конкретные формулы связи поля вектора  с полями векторов  и , при их однородном распределении внутри кругового цилиндрического проводника радиуса R и ориентированными вдоль его оси симметрии. В результате имеем:

при r < R 

и при r > R . (14)

Таким образом, поле электрического векторного потенциала  существует как в самом проводнике с током, так и вовне, оно непрерывно на его поверхности. В этой связи физически интересно представить проводник с током как “электрический соленоид”, поскольку поля индукции  и ее векторного потенциала  функционально эквивалентны аналогичным зависимостям  и  магнитного соленоида [2].

Однако представления о вектор-потенциале  будут по-настоящему физически содержательными только тогда, когда указан хотя бы в принципе метод его наблюдения, а лучше конкретный способ измерения параметров такого векторного поля. В нашем случае это вполне возможно и, в соответствии с соотношением (6), электрический векторный потенциал в асимптотике низких частот () определяется посредством соотношения:

. (15)

Видно, что распределение поля векторного электрического потенциала  проводника с током полностью соответствует топологии распределения напряженности магнитного поля , созданного этим током в процессе электропроводности, а их величины между собой прямо пропорциональны. Согласно [12], порядок величины времени релаксации электрического заряда в металлах  ~ 10-6 с, а конкретно для меди из эксперимента  ~ 3,6·10-6 с [13]. Следовательно, электрический векторный потенциал  проводника с током при  можно считать косвенно наблюдаемой физической величиной, поскольку реальное измерение магнитного поля не представляет серьезной технической проблемы.

В ситуации, отвечающей соотношениям (14), вычислим конкретное значение потокового вектора  внутри проводника:

. (16)

Здесь  =/2 – объемная плотность электрической энергии, формула которой в нашем случае определяется законами электропроводности Ома  и электрической поляризации проводника . Как видим, вектор  действительно представляет электрическую энергию, поступающую в проводник с током через единицу площади его боковой поверхности, при этом энергетика процесса электрической поляризации проводящей среды при стационарной электропроводности описывается следующим из соотношения (10) уравнением энергетического баланса частного вида: div.

Соответственно рассмотрим для проводника с током два других потоковых вектора:  и . В нашем случае для магнитного поля имеем из [2] при r ≤ R:  и . В результате получим конкретные выражения для векторов

 и , (17)

определяющих плотности магнитной энергии и момента импульса поля электромагнитных потенциалов, поступающих в цилиндрический проводник через его боковую поверхность. Тогда из соотношения (11) найдем уравнение баланса энергии процесса намагничивания проводящей среды под действием стационарного электрического тока: div, а из (12) - уравнение div, описывающее передачу момента электромагнитного импульса проводнику в данной ситуации.

В заключение подведем итог. Итак, проведена модификация уравнений Максвелла электромагнитного поля для электрического и магнитного векторных потенциалов, и на основе анализа физического содержания полученных уравнений установлена возможность существования динамических чисто электрических или магнитных явлений, показана реальность волн, переносящих только электрическую или только магнитную энергию. Выявлены необычные потенциальные волны, переносящие момент импульса поля электромагнитных векторных потенциалов, которые, однако, в явном виде не переносят энергии, поскольку  и  в них равны нулю. Вопрос о наблюдении и физическом смысле таких волн остается открытым.

На конкретном примере изучения энергетики процесса стационарной электропроводности в металле проиллюстрировано, что использование физических представлений об электромагнитных векторных потенциалах позволяет “увидеть” раздельно потоки чисто электрической и магнитной энергии, момента импульса, существующие в электромагнитном поле, поступающие вместе с известным потоком электромагнитной энергии в проводник в указанных условиях. Данное утверждение можно, по нашему мнению, считать теоретически вполне обоснованным.

Как нам представляется, проведенные исследования достоверно показали, что поля электромагнитных векторных потенциалов никоим образом нельзя считать математическими фикциями, поскольку они в полной мере обладают фундаментальными характеристиками объективной реальности: энергией, импульсом и его моментом. Таким образом, наряду с традиционными электромагнитными полями в электродинамике: , ,  и , их векторные потенциалы  и  также являются полноправными физически значимыми полями, расширяющими наши представления об электромагнитных полевых процессах.

**Список литературы**

1. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. I и II. М.: Наука, 1989.

2. Антонов Л.И., Миронова Г.А., Лукашёва Е.В., Чистякова Н.И. Векторный магнитный потенциал в курсе общей физики. / Препринт № 11. М.: Изд. Физ. ф-та МГУ, 1998.

3. Кропп В. Патент РФ № 2101842.

4. Сидоренков В.В. // Сборник трудов XIX Международной школы-семинара “Новые магнитные материалы микроэлектроники”. М.: МГУ, 2004. С. 740.

5. Матвеев А.Н. Электродинамика. М.: Высшая школа, 1980.

6. Соколов И.В. // УФН. 1991. Т. 161. № 10. С. 175.

7. Дюдкин Д.А., Комаров А.А. Электродинамическая индукция. Новая концеп- ция геомагнетизма. / Препринт НАНУ, ДонФТИ-01-01, 2001.

8. Сидоренков В.В., Толмачев В.В., Федотова С.В. // Изв. РАН. Сер. физич. 2001. Т. 65. № 12. C. 1776.

9. Сидоренков В.В. // РЭ. 2003. Т. 48. № 6. С. 746.

10. Мартинсон М.Л., Недоспасов А.В. // УФН. 1993. Т. 163. № 1. С. 91.

11. Сидоренков В.В. // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Сборник трудов. М.: Логос, 2005. С. 237.

12. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: ИЛ, 1958.

13. Корнев Ю.В., Сидоренков В.В., Тимченко С.Л. // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 4. С. 472.