**Поиски новой философии математики**

В.В. Целищев

Традиционным описанием проблем философии математики является описание того состояния оснований математики и ее философии, которое явилось естественным завершением попыток преодолеть кризис в основаниях математики, развившийся в начале ХХ в. Этот уже почти хрестоматийный материал хорошо известен читателю даже в самом простом нетехническом преподнесении (см. например, превосходную книгу М.Клайна “Математика: утрата определенности”), не говоря уже о массе более технических изложений, каковы например, “Введение в философию математики” Г.Лемана (H.Lehman “Introduction to the philosophy of mathematics”) или же “Философия математики” С.Корнера (Korner S. “The philosophy of mathematics”). Существует много других книг, в которых излагается материал, в той или иной мере связанный с достижениями в математической логике и основаниях математики, и во всех этих книгах фигурируют одни и те же имена и одни и те же проблемы - логицизм Фреге и Рассела, интуиционизм Брауэра и Гейтинга, формализм Гильберта и Неймана. Довольно охотно многие авторы соглашаются с мнением, которое четко было сформулировано А.Мостовским: “…Философские цели трех школ не были достигнуты, и … мы не ближе к полному пониманию математики, чем основатели этих школ. Вопреки этому, нельзя отрицать, что активность этих школ принесла огромное число новых важных открытий, которые углубили наше познание математики и ее отношение к логике. Как часто случается, побочные продукты оказались более важными, чем исходные цели основателей трех школ” [1]. В результате этого большая часть места в книгах отводится, с одной стороны, традиционному изложению взглядов трех школ, а с другой - интересным “побочным” результатам. Таким образом, создается иллюзия того, что философия математики продолжает быть активной частью философии, хотя, как недавно выразился Х.Патнэм, “ничего это (три великих школы) уже не работает” [2].

Данная статья представляет собой почти нарратив читающего текущую прессу философа, и автор не готов подписаться почти ни под одним из крайних утверждений, о которых здесь рассказывается. Во-первых, он имеет свою собственную версию происходящего, а во-вторых, разделяет с рядом своих коллег другое предложение по улучшению ситуации в философии математики, в частности, поддерживает так называемый проблемно-ориентированный подход к основаниям математики [3]. Тем не менее обзоры такого рода полезны, с максимальным сохранением стиля и манеры тех авторов, точки зрения которых достойны упоминания.

Определенная стагнация в этой области философии может быть оценена в сравнении с философией науки. В 30-40-х годах философия науки направлялась логическими позитивистами, влияние которых ослабло лишь с появлением новых идей о решающей роли научной практики и исторических рассмотрений в науке. Р.Херш говорит, что “философия математики запоздала со своими Поппером, Куном, Лакатосом и Фейерабендом. Она запоздала с анализом того, что делают сами математики, и с соответствующими философскими рассмотрениями” [4].

В результате этого собственно философские утверждения о математике стали менее интересными. Больше того, многие полагают, что сама философия математики представляет не фундаментальные проблемы философии, а скорее, является результатом исторически случайного взаимодействия философии и математики. Так, Хао Ван полагает, что “интерес философов к основаниям математики возник как результат той исторической случайности, что Рассел и Фреге правильно или неправильно связали некоторые области математики с философией… Тем не менее, с устойчивостью этого интереса следует считаться, хотя и сожалея о бедности философии” [5].

В любом случае общепринятым мнением философской коммуны является то, что в философии математики в настоящее время наблюдается стагнация. Но не все так безнадежно, и в уже цитированной выше работе Х.Патнэм дает краткий перечень устаревших и новых взглядов в философии математики:

логицизм (математика есть логика в чужом одеянии);

логический позитивизм (математические истины суть истины благодаря правилам языка);

формализм (теория множеств и неконструктивная математика суть просто “идеальное” - и само по себе бессмысленное - расширение “реальной” - конечной и комбинаторной - математики);

платонизм (согласно Геделю, реально существуют математические объекты, и человеческий ум имеет способность, отличающуюся в некоторой степени от восприятия, с помощью которой он приобретает все лучшие интуиции относительно поведения таких объектов);

холизм (Куайн полагал, что математика должна рассматриваться не как отдельная наука, а как часть всей науки и что необходимость квантификации над математическими объектами в случае достататочно богатого языка для эмпирических наук есть наилучшее свидетельство для “постулирования множеств с той же серьезностью, с какой мы относимся ко всякому онтологическому постулированию”; множества и электроны рассматривались Куайном на пару как нечто такое, что нужно постулировать в процессе научного исследования);

квазиэмпирический реализм (идея, о том, что есть нечто аналогичное эмпирическому исследованию в чистой математике);

модализм (мы можем переформулировать классическую математику таким образом, что вместо разговора о множествах, числах и других объектах будем просто утверждать возможность или невозможность определенных структур);

интуиционизм (принятие математических утверждений как значимых, и в то же время отказ от реалистических посылок относительно истин, например, бивалентности) [6].

Сам Патнэм полагает, что следует отказаться от первых четырех направлений и продолжать исследования, которые представляют собой определенную смесь последних четырех направлений. Другие исследователи считают перспективными направления, которые в той или иной степени пересекаются с этими последними, но в некотором смысле (в другой классификации) являются самостоятельными направлениями. Так, Дж.Кетланд говорит о дополнении списка Патнэма еще четырьмя направлениями (полагая при этом, что в целом этот список, состоящий из 12 направлений, покрывает все направления в философии математики):

номинализм (программа Х.Филда);

структурализм (программа С.Шапиро и М.Резника);

натурализм (программа П.Мэдди);

предикативный конструктивизм (программа С.Фефермана) [7].

Несмотря на новые программы, все эти направления находятся в русле, если можно так выразиться, классической философии математики. Между тем возможен более радикальный взгляд на философию математики, который, как считает Р.Херш, больше соответствует духу того, что делают работающие математики. Он полагает, что в повороте философии математики по направлению к практике ряд философов высказали новые взгляды, суть которых состоит в следующем.

· Математика является человеческим предприятием и, стало быть, частью человеческой культуры. Значит, математика не есть описание фрегевских абстрактных концепций и вневременной объективной реальности.

· Математическое знание погрешимо. Подобно науке, математика прогрессирует через ошибки и их исправление (Лакатос).

· Существуют различные версии доказательства и строгости в зависимости от времени, места и множества других вещей. Использование компьютеров в доказательстве есть нетрадиционная версия строгости.

· Эмпирические свидетельства, числовое экспериментирование, вероятностные доказательства помогают нам решать, во что верить в математике. Аристотелевская логика не является наилучшим способом решения этих проблем.

· Математические объекты суть специальный вид социально-культурно-исторических объектов. Мы можем выделить математику из литературы или религии. Тем не менее математические объекты являются общими культурными идеями, подобно литературным персонажам или религиозным концепциям [8].

Столь радикальный отход от стандартов философии математики предполагает, конечно, в высшей степени ретроспективный и отстраненный взгляд на все предприятие, связанное с философией математики. Херш атакует традиционную, доминирующую философию математики и предлагает “радикально новый гуманистический ответ на ее вопросы: “От союза Математики и Религии в стране Науки произошло два дитяти, Платонизм и Основания, с притязаниями на знатность (математические истины суть вечные истины в уме Бога; интуиция, способность человека взаимодействовать с этими истинами может дать неоспоримые основания). После Канта брак распался, и религия была изгнана из страны Науки. Один из главных воспитателей Оснований, Евклидова Геометрия, была изгнана своими молодыми кузенами - Неевклидовыми Геометриями и ранена Анализом и Арифметизацией. Их отпрыск, Множество, обещал защитить детей, но не смог по причине своей нетвердости. Вопреки усилиям трех защитников - Лог(ицизма), Инт(уиционизма) и Форм(ализма), Основания умерли. Платонизм выжил, и несмотря на его теологические претензии и анафему гражданам Науки, доминирующая философия продолжала предоставлять ему убежище. Математика не должна, по заверениям гуманистов, подчиняться диктату Платонизма. Она должна вести свою жизнь, сама определяя себе правила. С некоторыми заметными гуманистическими исключениями (среди них - Аристотель, Локк, Виттгенштейн, Лакатос, Китчер) доминируюшая область включает традиционную и современную философию математики” [9]. Херш, естественно, причисляет себя к гуманистам.

Следует сказать несколько больше относительно того, что же представляет собой так называемая гуманистическая математика. В целом ее можно отнести к новому модному направлению в философии - так называемому социальному конструированию, хотя гуманистическая математика является менее радикальным взглядом по сравнению с социальным конструированием. Дело в том, что признание математики просто человеческой активностью, с точки зрения гуманистической математики, вообще не имеет отношения к философии математики. Последняя усматривает скрытый смысл за пределами социально-историко-культурного контекста, который проявляется в неизменной онтологии математических объектов и вневременном характере математических истин. Но если, как это утверждает гуманистическая математика, математическое познание погрешимо, тогда истина и онтология в математике изменяются по ходу познания.

Конфликт между гуманистической математикой и классической философией математики является достаточно глубоким, поскольку отражает не только недовольство стагнацией в философии математики, но и попытки радикального отделения философии от математики вообще. Херш говорит, что зачастую нет смысла философствовать по поводу математики, ища в ней скрытый смысл. Все, что есть в математике, - это деятельность работающих математиков, и поиски философов по поводу того, что такое математика, не имеют отношения к деятельности математиков. Философия тут берет ложный след.

Ж.К.Рота идет еще дальше и дает объяснение тому факту, что философия пошла по неверному пути вообще, ассоциировав себя с математикой. Философия, подобно математике, опирается на аргументацию, поскольку обе науки используют логику. Но в отличие от общепринятых стандартов у математиков стандарты аргументации у философов оказались весьма различными. “Отношения философии и богини Разума всегда были скорее отношениями вынужденного сожительства, нежели отношениями романтической связи, которая всегда существовала между математикой и богиней Разума” [10]. Далее Рота утверждает, что заключения философов часто диктуются эмоциями и разум в этих заключениях играет лишь вспомогательную роль. А поиски философией окончательного ответа на свои вопросы вылилась в рабскую имитацию математики. Апелляция к математической логике, которая и представляет собой главную основу философии математики, оказалась несостоятельной, потому что логика больше не является частью философии. Математическая логика является процветающей частью математики, и она прекратила свои связи с основаниями математики. “Ценой допущения логики в математическую область было гигиеническое очищение даже от следов философии” [11].

Итак, в философии математики создалась следующая ситуация. С одной стороны, хотя есть признание стагнации в классической философии математики и даже признание того, что “ничего из этого не работает”, существует ряд направлений, имеющих целью придать философии математики новое дыхание. С другой стороны, есть полное отрицание значимости классической философии математики, обоснованное убеждением, что философская оценка математической деятельности бесплодна: математическая деятельность не имеет в себе скрытого смысла, искомого философией, и сама философия неправильно следует в своих собственных стандартах строгости, на которых основывается философия математики, за этой самой математикой. Ясно, что с классической философией математики что-то не так, но в поисках нового дыхания этой фундаментальной области философии требуется ответить на упреки гуманистической математики. Таким ответом является эпистемологический поворот в исследованиях по основаниям математики и в целом в философии математики.

Следует признать, что в последнее время в философии математики проделана большая работа. Быть может, главным обстоятельством здесь является то, что философия математики есть часть философии и на ней сказываются все те тенденции, которые свойственны всей философии. Философия даже относительно элементарных ветвей математики - это такая дисциплина, в которой ясно фокусируются теории о природе языка, знания, указания и истины. Именно это обстоятельство делает исследования в философии математики важным видом философского исследования. Такая тенденция выразилась в эпистемологическом уклоне в философии математики.

Возможны два представления того, что было сделано в философии математики за последнее время. Подлинные события в философии отнюдь не всегда связаны с большими книгами или монументальными проектами. Примером тому может служить ситуация в теории познания, когда статья Э.Гетье объемом лишь в несколько страниц [12] несколько десятков лет назад вызвала шквал публикаций и в значительной степени изменила тематику дискуссий. В философии математики аналогичную роль сыграли две статьи П.Бенацеррафа, которые практически определили направление развития в этой области. Примечательно, что одна статья подняла проблему эпистемологического статуса математических утверждений, а вторая - подняла проблему онтологического статуса математических объектов. Примечательно и то, что обе проблемы заключаются в вызове доминирующей среди работающих математиков философии - платонизму. Исследования последних лет в философии математики были посвящены попыткам ответить на этот вызов. Именно этому кругу вопросов и посвящена данная книга. Фактически, это свод того, что происходило в философии математики в последние два с лишним десятка лет.

Одно из упомянутых выше представлений связано с попыткой увязать новые исследования с традиционными направлениями - логицизмом, формализмом и интуиционизмом, т.е. представить новые направления как реакцию на традиционные. Другое связано непосредственно с эпистемологической тенденцией, вызванной к жизни постановкой двух дилемм П. Бенацеррафом в его работах “Чем могут быть числа” (“What numbers could not be”) и “Математическая истина” (“Mathematical truth”) [13].

Надо отдавать себе отчет в том, что такая попытка заранее обречена на частичный провал. Важнейшим отличием описания того, что собой представляет нынешняя философия математики по сравнению с классической, является почти полная бесполезность устойчивой классификации. В этом отношении ситуация в философии математики похожа на ситуацию в аналитической философии вообще. Дж.Пассмор выразил свое ощущение этой ситуации такими словами: “Буйное, плохо вмещающееся в какие-либо рамки, невероятно разнообразное в целях и методах - можно ли надеяться описать, хоть и кратко, но в то же время с достаточным охватом англо-американское философское предприятие? Ответ на этот вопрос - невозможно. Столь много философов творят в наше время, столь много проблем поднято ими, и поэтому полнота больше не представляется разумной амбицией. Более скромное название моей книги, скажем “Некоторые последние философские споры, слишком кратко описанные”, было бы более подходящим названием в современном стиле” [14].

Прекрасной иллюстрацией тех трудностей, которые возникают перед желающим дать четкую классификацию направлений и концепций современной философии математики, является понимание самого основного термина - “реализм”. М.Шапиро дает такую сводку: «Реалист говорит, что “числа существуют”. Антиреалист говорит: “числа не существуют”. Тут страсти нешуточные. Оппонентов часто называют “теологами”, “скептиками” - весьма оскорбительные слова на современном жаргоне. Является хочу понять эти направления как рабочие программы. Реализм может иметь много смыслов. Один - что математические объекты существуют независимо от математиков. Это реализм в онтологии. Другой - что утверждения различных областей математики имеют объективные бивалентные истинностные значения независимо от конвенций, языка и правил математиков и основная часть утверждений компетентных математиков истинна. Это - реализм в истинностных значениях. Нет общего согласия относительно соотношения этих двух видов реализма. Мэдди и Гедель - реалисты в обоих смыслах. Даммит - антиреалист в обоих смыслах. Хелман и Чихара - антиреалисты в онтологии и реалисты в истинностных значениях. Единственный человек - реалист в онтологии и антиреалист в истинностных значениях - это Теннант» [15].

Важность именно эпистемологических рассмотрений хорошо видна из следующего описания ситуации У.Хартом: “Во времена заката чувственных данных и аналитичности эпистемология утратила место центра посткритической философии и вообще современной философии. С подъемом семантики и возрождением онтологии эпистемология находится в закате. Фреге ниспровергнут. Сейчас публика считает более близкими древних, нежели современников. Но все-таки эпистемология заслуживает места в Республике Философия. Причина этого такова: некоторые из глубочайших проблем философии состоят в примирении естественных, но несовместимых онтологий. Нигде такой конфликт не является столь старым, как в философии математики. Платон героически пытался найти правдоподобную эпистемологию для своей теории форм. Платонизм правдоподобен, когда вы мыслите о математической истине, но становится невозможным, когда речь идет о математическом познании. Так что стоит переосмыслить основные проблемы теории познания, коль скоро причинность, холизм и натурализованная эпистемология заняли место чувственных данных и аналитичности. Нашим интеллектуальным долгом является прогресс не просто в математической логике, но и в эпистемологии” [16].

Последняя четверть ХХ в. прошла в поисках согласия по поводу того, в чем состоит ответ на теоретико-познавательную дилемму, поставленную в работе П.Бенацеррафа “Математическая истина”. Дилемма формулируется следующим образом: если математика представляет собой исследование объективных идеальных сущностей и если когнитивные способности человека позволяют ему познавать только чувственные объекты, то как он может познавать математические объекты? Апелляция к познанию чувственных объектов предполагает совершенно определенную концепцию познания - так называемую причинную теорию познания. Можно возразить, что это не единственная теория, и тогда дилемма теряет смысл. Однако можно переформулировать дилемму таким образом, что она не будет опираться на специфическую теорию познания (Филд и Мэдди). Дилемма ставит перед нами выбор: либо отрицать, что математика говорит о числах, либо предполагать некоторые неестественные способности человека в отношении сбора информации. Поскольку обе возможности не выглядят привлекательными, предпринимались различные попытки разрешить дилемму. В частности, есть согласие по поводу того, что можно провести “онтологическую разрядку”, при которой не надо будет жертвовать стандартной математикой.

Конечно, очень важно, какого рода будет “онтологический ремонт”. Именно тут начинаются разногласия, которые, тем не менее, преодолеваются при нахождении некоторого консенсуса. Каковы здесь альтернативы? С.Шапиро и М.Резник полагают, что математика говорит не о специфических математических объектах, а о структурах. Ф.Китчер делает упор на актах объединения в множества. Ч.Чихара прибегает при объяснении математических сущностей не к теории множеств, а к теории типов, рассматривая сущности как открытые предложения. Дж.Хеллман и Х.Филд используют для объяснения математических сущностей модальную логику, полагая эти сущности скорее возможностями, нежели актуальностями. Важнейшим обстоятельством при этом является то, что в основе всех подходов лежит апелляция к перцептуальному опыту, понимаемому в самом широком смысле слова. Наиболее характерны в этом отношении работы П.Мэдди. Она считает, что предполагаемые платонистские сущности могут быть доступны обычному восприятию.

Важным исключением из этого общего консенсуса является философия номиналиста Х.Филда, который полагает, что математических объектов не существует, что стандартная математика ложна, но при этом он стремится сохранить математическую практику. Для этого он снабжает физическую реальность значительной математической структурой и описывает физические версии анализа и топологии. Математические утверждения типа континуум-гипотезы оказываются утверждениями об областях пространства и времени. Но опять-таки эпистемический доступ к этим областям оказывается перцептуальным. И в этом смысле Филд принадлежит к общему консенсусу.

Теперь рассмотрим радикальный тезис о том, что философия не имеет отношения к математике. С этой точки зрения математика живет своей собственной жизнью независимо от каких-либо философских рассмотрений. Взгляды относительно статуса математических объектов или утверждений ничего не вносят в математику и являются худшей софистикой, бормотаньем и вмешательством посторонних. Надо признать, что большинство математиков вообще не интересуются философией, или онтологией, или семантикой. Ну а те математики, которые исповедуют философию, часто входят в противоречие со своей собственной практикой (Херш как-то заметил, что работающий математик всю неделю сознает себя формалистом, и лишь по воскресеньям - платонистом).

В этом отношении близким взглядом является натурализм, характеризуемый Куайном как “отказ от первой философии” и “осознание того, что только в рамках самой науки должна описываться и идентифицироваться реальность”. Мэдди применяет натурализм к математике, также утверждая, что математика должна быть изолирована от традиционных философских исследований. Ну и все проблемы в математике должны решаться математиками как математиками. Как быть с такой радикальной точкой зрения?

Известно, что многие знаменитые математики были философами. Так, Гедель утверждал, что его реализм был важным фактором открытия полноты первопорядковой логики и неполноты арифметики. Например, теорема полноты есть следствие некоторых результатов Сколема. Но Сколем не сделал этого шага. Почему? Потому что оба они имели различные ориентации в онтологии. Но это лишь немногие счастливые примеры среди моря примеров отрицательного отношения математиков к философии.

Херш продолжает атаковать философию математики еще более яростно, настаивая на том, что даже подразумеваемая философия работающего математика, а именно платонизм, ущербна в самой основе. Характерным подтверждением такой позиции является следующее его высказывание: “Проблема состоит в том, что Платонизм оставил Бога, но продолжает считать Математику мыслями Бога”. Херш полагает, что “традиционная философия осознает только передовой фронт математики. Но нельзя понять передовой фронт без того, чтобы понять ее фон. Внутренний участник событий мог бы: 1) помочь лучшему пониманию мешанины в математике и сформулировать проблемы под правильным углом зрения с учетом контекста, с новой возможностью решить их; 2) показать, что нет нужды философствовать по поводу математики, ища скрытый смысл в ней; 3) дать философский ответ на то, что есть математика. Однако пролегомены (1) не должны быть терапевтическими по отношению к (2) и не должны делать позитивного вклада в (3). Херш сам предпочитает занимается в основном (3). Внутренний участник может дать ответ на (1), но вряд ли на (2) и (3). Большая часть внутренних участников являются повседневными платонистами, а по выходным - формалистами, что вносит философскую путаницу.

Большинство внутренних участников (от Декарта до Гильберта) были осведомлены о “задворках” математики, но их, в отличие от Херша, интересовал вопрос не о том, что такое математика, а о том, как мы объясняем объективность математических вер и надежность математического размышления. Социальный характер математики является тривиальным обстоятельством, свойственным всему человеческому знанию.

В подобного рода рассмотрениях важное место занимает позиция работающего математика, или, более фундаментально, математическая практика. Любое обсуждение философии науки требует обращения к научной практике. Но для философских целей понятие практики часто принимает нужную форму в угоду философским предпочтениям. Поэтому желательно заранее сформулировать, что представляет собой научная практика, или, более точно, какова структура научной практики, которая является предметом философского анализа.

В случае математики суть практики отнюдь не сводится к доказательству, хотя традиционно считалось, что математик доказывает истины. Само понятие доказательства представляет собой цепь аргументов, значимость которых варьировалась в зависимости от той же самой математической практики. Научная практика имеет много компонентов: язык, теоретические принципы, примеры теоретической и экспериментальной работы, принятые методы размышления, техника разрешения проблем, оценка важности вопросов, метанаучные взгляды на природу научного поиска. Ф.Китчер рассматривает математическую практику как предприятие, включающее в себя пять компонентов: язык, множество принятых предложений, множество принятых способов рассуждения, множество принятых в качестве важных вопросов и множество метаматематических взглядов (стандарты доказательства и определения, а также утверждения о сфере и структуре математики) [17].

Таким образом, традиционные взгляды на философию математики претерпевают значительное изменение. Среди хаоса мнений и предположений о том, в какой степени математика связана с философией, следует найти какой-то порядок, который смог бы дать точку опоры в будущей философии математики, если ей суждено выжить. На мой взгляд, таковой является эпистемологическая ориентация на вопросы математического познания, а не на традиционные вопросы о природе математических объектов и математической истины.

**Список литературы**

1. Mostowski A. Thirty years of foundational studies // Acta Filosophica Fennica, 1963.

2. Putnam H. Philosophy of mathematics - why nothing works? // Putnam H. Words and life. - Harvard UP. - P. 499-512.

3. См.: Проблемно-ориентированный подход к науке: новая философия математики / Под ред. В.В.Целищева. - Новосибирск: Наука, 2001.

4. Hersh R. A fresh winds in the philosophy of mathematics // Amer. Math. Monthly. - 1995. - Aug.-Sept. - P. 590-591.

5. Хао Ван. Процесс и существование // Математическая логика и ее применение. - М., 1965.

6. См.: Putnam H. Philosophy of mathematics…

7. www.math.psu.edu/simpson/fom/posting/006/msg00142.html

8. См.: Hersh R. The fresh wind in the philosophy of mathematics. - P. 590, 591.

9. Hersh R. What is mathematics, really. - N.Y.: Oxford UP, 1997. Review in: Philosophy of Science. - V. 66, No 3. - P. 501, 502.

10. Rota J.C. Mathematics and philosophy // Rev. Metaphys. - V. 44, is. 2, No 174. - P. 259-272.

11. Ibid.

12. См.: Gettier E. Is justified true belief knowledge? // Analysis. - 1963. - V. 23.

13. См.: Benazerraf P. What numbers could be // Philos. Rev. - 1965. - V. 74, No 1; Id. Mathematical truth // Journ. Philos. - 1973.

14. Passmore J. Recent philosophers. - Open Court, 1991.

15. Shapiro M. // Philosophia Mathematica. - 1994. - Ser. 3. - P. 148-160.

16. Hart W. Review of M. Steiner's “Mathematical knowledge” // Journ. Philos. - 1977. - V. 74. - P. 118, 119.

17. См.: Kitcher Ph. The nature of mathematical knowledge. - P. 163.