послушные шарики или еще раз о развитии логического мышления

Математическая логика (теоретическая логика, символическая логика) — раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики (“Математическая энциклопедия”).

Всякая математическая теория представляет собой множество предложений, над которыми производятся действия (операции), в результате которых снова получаются предложения.

Если нет логических операций — нет математической логики, да и вообще математики; если ученик не совершает этих операций, то вряд ли приходится говорить о развитии логического мышления.

В начальной школе в первую очередь именно через решение задач ребенок учится рассуждать, т. е. строить предложения с помощью слов и словосочетаний: *неверно, что* — логическая операция, называемая отрицанием; *и* — конъ­юнкция; *или* — дизъюнкция; *если…, то…* — импликация; *тогда и только тогда, когда* — эквиваленция. Мы не будем давать определения, поскольку учителя знакомы с этими операциями из курсов математики педагогических университетов (институтов) и педколледжей (училищ).

1. Две классические задачи

1. *В трех одинаковых коробках лежат по два шарика: в одной — два черных, в другой — два белых, в третьей — белый и черный. На каждой коробке есть табличка: на одной изображены два белых шарика, на другой — два черных, на третьей — белый и черный. Но известно, что содержимое каждой коробки не соответствует табличке. Как вынув только один шарик только из одной коробки, переставить таблички на коробках в соответствии с их содержимым?*



Решение

Пронумеруем коробки как на *рис. 1*.

В коробке 3 находятся либо два белых шарика, либо два черных. Достанем из нее шарик. Допустим, он оказался белым (рис. 2).



Следовательно, в коробке 3 — два белых шарика (рис. 3).



Поскольку в коробке 1 не может быть ни двух черных шариков (по условию надпись не соответствует действительности), ни двух белых (они в коробке 3), то там — черный и белый (рис. 4):



Ответ изображен на рис. 5.



Если бы из коробки 3 при первой попытке мы вытащили черный шарик, то ответ был бы таким (рис. 6):



Подчеркнем, что при рассуждениях мы пользовались словами “*неверно, что* в коробке такие-то шары” (*отрицание*), “*если* достанем белый шар, *то*…” (*импликация*) и т. д. Таким образом, ребенок, сам того не подозревая, совершает логические операции над высказываниями.

2. *У меня в трех коробках лежали гвозди, винты и гайки. На каждой коробке было написано, что в ней лежит. Однажды мой младший брат пересыпал содержимое коробок так, что надпись на каждой коробке перестала соответствовать ее содержимому. Хорошо еще, что он не перепутал их между собой: гвозди остались лежать отдельно от гаек и винтов и т. д. Можно ли, открыв одну из коробок, определить, что лежит в каждой из коробок?*

Решение



Во-первых, для простоты обсуждения, гвозди, винты и гайки обозначим кружочками разных цветов (рис. 7). Во-вторых, заметим, что начинать рассуждения можно с любой коробки. Приведем один из вариантов, а другие — предоставим ученикам.

Откроем коробку 1. Допустим, там оказались гайки (рис. 8; а могли быть и винты: рассуждения проводились бы аналогично).



В коробке 2 винтов быть не может по условию, следовательно, винты — в коробке 3 (рис. 9).



Ну, а во второй коробке — гвозди.

2. Шариковый сериал

Имеются два непрозрачных ящика. В них находятся один черный и один белый шарик:

либо по одному в каждом ящике,

либо в одном ящике два шарика.

На ящиках есть надписи, по которым надо определить (если возможно), где какой шарик находится.

Указывается также, являются ли надписи истинными или ложными.

Условия задач и ответы представим в виде таблицы. *И* — истинно, *Л* — ложно. Запись “Обе *И*” означает, что надписи на каждом ящике правдивы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Ящик 1 | **Ящик 2** | **Истинность**  **надписей** | **Ответ** |
| 1 | Здесь | Здесь нет шариков | Обе ***И*** | В ящике 1 и черный, и бе­лый шарики |
| 2 | Здесь нет шариков | Здесь оба шарика | Обе ***Л*** | Возможны варианты (решение после табл.) |
| 3 | Здесь | Здесь | Обе ***Л*** | В ящике 1 — белый шарик, в ящике 2 — чер­­ный |
| 4 | Здесь *не* | Здесь *не* | Обе ***И*** | В ящике 1 — черный шарик, в ящике 2 — белый |
| 5 | Здесь *не* | Здесь *не* | Обе ***Л*** | В ящике 1 — белый шарик, в ящике 2 — черный |
| 6 | Здесь *или*  здесь | Здесь | Обе ***И*** | В ящике 1 — белый шарик, в ящике 2 — черный |
| 7 | Здесь *или*  здесь | Здесь | Обе ***Л*** | В ящике 1 — черный шарик, в ящике 2 — белый |
| 8 | Здесь *и*  здесь | Здесь | Первая — ***И***,  Вторая — ***Л*** | В ящике 1 — оба шарика, в ящике 2 — пусто |

Решение

1. Поскольку надписи истинны, то в ящике 2 шариков нет. Следовательно, они оба в ящике 1.

*Внимание*. Надпись на ящике 1 “здесь черный” не означает, что там не может быть белого шарика. Ведь утверждение “директор моей школы живет в Беларуси” не означает, что в стране не живу я…

2. Так как надпись на ящике 2 неверна, то возможны варианты:

а) в ящике 2 нет шариков вообще, следовательно, в ящике 1 — и белый, и черный шарики;

б) если неверно утверждение “здесь оба шарика”, то верным может быть утверждение “здесь белый шарик” или “здесь черный шарик” (т. е. один из шариков находится в ящике 2), значит в ящике 1 тоже один шарик.

*Информация для учителя*. В этой задаче мы имеем дело с одним из законов де Моргана: , который звучит так: *отрицание конъюнкции двух высказываний эквивалентно дизъюнкции отрицаний каждого из данных высказываний*. Напомним также, что дизъюнкция истинна, если истинно хотя бы одно из высказываний. Применительно к нашей задаче: утверждение **“неверно, что в ящике 2 лежат оба шарика”** равносильно утверждению **“неверно, что в ящике лежит черный шарик, *или* неверно, что в ящике лежит белый шарик”**. Отсюда и получаются вышеописанные варианты а) и б).

Решения остальных задач предоставляем учителю.

Таким образом, ученик “проходит” через логические операции, хотя, естественно, и не знает их строгих определений (на интуитивном уровне), следовательно, его логическое мышление развивается. Учитель же знает законы логики и может корректировать рассуждения ребенка, если они ошибочны.

*А. Щан* — старший преподаватель кафедры математики и методики ее преподавания БГПУ