**Сопряжённые числа**

**Н. Вагутен**

В этой работе мы рассмотрим ряд ситуаций, в которых число вида a + b√d полезно заменить сопряжённым a – b√d. Мы увидим, как этот простой приём — замена знака перед радикалом — помогает в решении разнообразных задач алгебры и анализа — от нехитрых оценок и преобразований до трудных олимпиадных задач и замысловатых придумок составителей конкурсных экзаменов.

Большинство наших примеров может служить первым знакомством с глубокими математическими теориями (кое-где мы указываем статьи и книги для продолжения знакомства). Среди задач, включённых в статью, две — из Задачника «Кванта» и несколько — из писем читателей, уже испытавших удовольствие от трюков с радикалами и желающих поделиться им с другими.

Пары сопряжённых чисел появляются вполне естественным образом, когда мы решаем квадратное уравнение, а корень из дискриминанта не извлекается: скажем, уравнение λ2 – λ – 1 = 0 имеет пару «сопряжённых» корней:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| λ1 = | 1 – √5  2 | и | λ2 = | 1 + √5  2 | . |

К этому мы ещё вернёмся, а начнём с примеров другого рода: займёмся «перебросками»...

...Из числителя в знаменатель (и обратно)

Если в книжке указан ответ к задаче (3 + √7)/2, а у вас получилось 1/(3 – √7) — не спешите искать ошибку в решении: ответ правильный — эти числа равны, потому что

(3 + √7)(3 – √7) = 32 – 7 = 2.

Вот несколько характерных примеров, где полезно перенести «иррациональность» из числителя в знаменатель или наоборот.

1. Найти сумму

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1  1 + √2 | + | 1  √2 + √3 | + ... + | 1  √99 + √100 | . |

Эта сумма мгновенно «сворачивается», если переписать её так:

(√2 – 1) + (√3 – √2) + ... + (√100 – √99) = –1 + 10 = 9.

По выражению из статьи [1] «остаются крайние» (см. также [5]).

2. Доказать, что для любых натуральных m и n

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | m  n | – √2 |  | ≥ | 1  αn2 | , | | (1) |

где α = √3 + √2.

Подобный факт мы использовали недавно при решении трудной задачи М514 ([2]).

В самом деле, всегда

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | m – n√2  n |  | = | |m2 – 2n2|  (m + n√2)n | ≥ | 1  (m + n√2)n | , | | (2) |

поскольку число |m2 – 2n2| — целое и отлично от 0 (равенство m2 = 2n2 невозможно — подумайте, почему!). Если бы выполнялось неравенство, противоположное (1), то должно было бы быть m < n√2 + 1/αn и

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | n(m + n√2) < n | ( | 2n√2 + | 1  αn | ) | = 2n2√2 + | 1  √3 + √2 | = |  |  | | --- | | = 2n2√2 + √3 – √2 ≤ n2(2√2 + √3 – √2) = αn2. | | (3) |

Но из (2) и (3) следует (1). Значит, наше предположение неверно, то есть (1) выполнено.

Неравенство (1) показывает, что число √2 сравнительно плохо приближается дробями с небольшими знаменателями; аналогичное неравенство (только с другим коэффициентом α) выполнено не только для √2, но и для любой «квадратичной иррациональности». Разумеется, (1) выполнено и при всех α > √3 + √2, но константа √3 + √2 здесь не наименьшая из возможных. Вопросы о приближениях квадратичных иррациональностсй рациональными числами — далеко продвинутая и важная для приложений область теории чисел ([3], [4]); с приближениями числа √2 мы ещё встретимся ниже (см. упражнение4).

[Если при решении этой задачи рассмотреть отдельно случаи n=1 и n≠1, то можно показать, что

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | m  n | – √2 |  | ≥ | 1  πn2 | . |

Оно лишь немного сильнее, чем неравенство (1), поскольку

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1  π | = 0,3183... > 0,3178... = | 1  √3 + √2 | , |

зато выглядит гораздо эффектнее.

Помню, как в мою бытность студентом, на лекциях по алгебре наш профессор говорил: «Корень из трёх — это, примерно, 1,73; корень из двух — 1,41. Поэтому их сумма равна... (следовала пауза, необходимая для сложения этих чисел "в столбик") 3,14. А это есть?..» (он поворачивался к аудитории и сразу несколько человек говорили "пи") «Ну, вот», — с удовлетворением заключал профессор, выписывая окончательное "равенство": √3 + √2 = π. :) — E.G.A.]

3. Найдите предел последовательности an = (√n² + 1 – n)n.

Преобразуем an так:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| (√n² + 1 – n)n = | n  √n² + 1 + n | = | 1  1 + √1 + 1/n² | . |

Теперь ясно, что an возрастает и стремится к пределу 1/2.

В противоположность предыдущему примеру здесь мы имеем дело с хорошим приближением: √n² + 1 – n < 1/2n.

4 . Даны две последовательности an = √n+1 + √n и bn = √4n+2. Докажите, что

а) [an] = [bn],

б) 0 < bn – an < 1/16n√n.

В разности bn – an появляется «тройная иррациональность»; к таким иррациональностям мы ещё вернёмся (см. задачу8), но пока мы будем рассматривать √n+1 + √n = an как одно целое. Заметим, что величина an2=2n+1+2√n(n+1), очевидно, заключена между 4n+1 и 4n+2=bn2, поскольку n < √n(n+1) < n+1. Итак, мы уже получили an < bn — левое неравенство в б). Кроме того, число bn2 = 4n+2, дающее при делении на 4 в остатке 2, не может быть полным квадратом (проверьте!), поэтому квадрат целого числа [bn] не больше 4n+1; из неравенств [bn] ≤ √4n+1 < an < bn вытекает а). Теперь осталось оценить разность bn – an сверху. Посмотрите, как здесь дважды работает переброска «сопряжённого» числа в знаменатель:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| √4n+2 – √n – √n+1 = | 2n + 1 – 2√n(n + 1)  √4n + 2 + √n + √n + 1 | = |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| = | 1  (√4n + 2 + √n + √n + 1)(2n + 1 + 2√n(n + 1)) | ≤ |

(тут, конечно, нам повезло:

разность квадратов (2n + 1)2 – 4n(n + 1) равна 1)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ≤ | 1  (2√n + √n + √n)(2n + 2n) | = | 1  16n√n | . |

Заметим, что и эта оценка очень точная. Но убедиться в этом (и вообще исследовать поведение функции с многими радикалами) лучше уже не с помощью алгебраических преобразований, а средствами анализа — заменить переменную n на h = 1/n и воспользоваться формулой Тейлора √1 + h = 1 + h/2 – h2/8 + ... (См. [6].)

Заменим плюс на минус

Мы уже говорили о пользе симметрии в геометрических задачах. Своего рода симметрией в алгебре является замена плюса на минус.

Так, если какое-либо выражение от √d равно p + q√d и мы всюду в этом выражении заменим √d на –√d, то естественно ожидать, что новое выражение окажется равным сопряженному числу p – q√d. Мы будем пользоваться таким очевидным частным случаем этого свойства (a и b — рациональны, √d — нет):

|  |  |
| --- | --- |
| (a + b√d)n = p + q√d => (a – b√d)n = p – q√d. | (4) |

5. Доказать, что уравнение

(x + y√5)4 + (z + t√5)4 = 2 + √5

не имеет решений в рациональных числах x, y, z, t.

Можно, конечно, найти отдельно сумму членов левой части, не содержащих √5 (она должна быть равна 2), и отдельно — коэффициент при √5 (он должен равняться 1). Но что делать с полученной громоздкой системой неясно. Вместо этого воспользуемся (4) и заменим плюс перед √5 на минус!

(x – y√5)4 + (z – t√5)4 = 2 – √5.

Слева стоит неотрицательное число, справа — отрицательное.

6. Доказать, что существует бесконечно много пар (x;y) натуральных чисел, для которых x2 отличается от 2y2 на 1:

|  |  |
| --- | --- |
| |x2 – 2y2 | = 1. | (5) |

Несколько таких пар с небольшими (x;y) легко найти подбором: это (1;1), (3;2), (7;5), (17;12), ... (рис.1). Как продолжить этот набор? Можно ли записать общую формулу для этих решений?

|  |
| --- |
| Рис. 1. Проходят ли эти гиперболы  через бесконечное число узлов клетчатой бумаги? |

Найти ответы на эти вопросы нам поможет число 1 + √2. Закономерность, позволяющая получать всё новые и новые решения (x;y), указана в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | (1 + √2)n | xn | yn | xn2 – 2yn2 | (1 – √2)n |
| 1 | 1 + √2 | 1 | 1 | 1 – 2 = –1 | 1 – √2 |
| 2 | 3 + 2√2 | 3 | 2 | 9 – 8 = 1 | 3 – 2√2 |
| 3 | 7 + 5√2 | 7 | 5 | 49 – 50 = –1 | 7 – 5√2 |
| 4 | 17 + 12√2 | 17 | 12 | 289 – 288 = 1 | 17 – 12√2 |
| 5 | 41 + 29√2 | 41 | 29 | 1681 – 1682 = –1 | 41 – 29√2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Какой будет шестая строчка?

Видно, что коэффициенты xn, yn в числе

xn + yn√2 = (1 + √2)n

будут давать нужную пару. Доказать это поможет колонка таблицы из сопряжённых чисел (мы снова применяем (4)):

xn – yn√2 = (1 – √2)n.

Перемножив два последних равенства, получим

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 2  n | – 2y | 2  n | = (–1)n, |

и интересующее нас выражение попеременно равно то 1, то –1. Складывая и вычитая эти же два равенства, мы получим явное выражение для xn и yn:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| xn = | (1 + √2)n + (1 – √2)n  2 | , |
| yn = | (1 + √2)n – (1 – √2)n  2√2 | . |

Можно ли в решении этой задачи про целые числа обойтись без иррациональных чисел 1 + √2 и 1 – √2? Теперь, зная ответ, мы можем легко выразить (xn+1;yn+1) через предыдущую пару (xn;yn): из xn+1 + yn+1√2 = (xn + yn√2)(1 + √2) вытекает

|  |  |
| --- | --- |
| xn+1 = xn + 2yn, yn+1 = xn + yn. | (6) |

До этого рекуррентного соотношения можно было, видимо, догадаться по нескольким первым решениям, а потом проверить, что

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |x | 2  n | – 2y | 2  n | | = |x | 2  n+1 | – 2y | 2  n+1 | |. |

Добавив начальное условие x1 = 1, y1 = 1, отсюда (по индукции) можно было бы заключить, что |xn2 – 2yn2| = 1 для любого n. Далее, выразив обратно (xn;yn): через (xn+1;yn+1), «методом спуска» ([8]) можно доказать, что найденной серией исчерпываются все решения уравнения (5) в натуральных числах (x;y). Подобным же образом решается любое «уравнение Пелля» x2 – dy2 = c (а к уравнениям такого типа сводится любое квадратное уравнение в целых числах x, y), но у исходного уравнения может быть несколько серий решений ([7]).

Рекуррентные соотношения типа (6) возникают не только в теории чисел, но и в разных задачах анализа, теории вероятностей. Вот характерный пример комбинаторной задачи такого типа (она предлагалась на последней международной олимпиаде в Лондоне):

7. В вершине A правильного восьмиугольника сидит лягушка. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E, противоположной A, она может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в E, лягушка останавливается и остаётся там. Найти количество em различных способов, которыми лягушка может попасть из вершины A в E ровно за m прыжков.

Если раскрасить вершины восьмиугольника через одну в чёрный и белый цвет (рис.2), сразу станет ясно, что e2k–1 = 0 при любом k: цвет вершин при каждом прыжке меняется. Обозначим через an и cn количество способов, которым лягушка может за 2n прыжков, попасть из вершины A, соответственно, в вершину A и в одну из вершин C (из соображений симметрии ясно, что в каждую из вершин, обозначенных на рисунке буквой C, можно попасть одним и тем же числом способов). Как легко проверить (см. рис.2а,б,в,г),

a1 = 2, c1 = 1;

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  | an+1 = 2an + 2cn, | |  |  | |  | cn+1 = an + 2cn. | | (7) |

А интересующее нас число e2n равно, очевидно, 2cn–1 (рис. 2д).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) c1 = 1 | б) a1 = 2 | в) an+1 = 2an + 2cn |

|  |  |
| --- | --- |
| г) cn+1 = an + 2cn | д) e2n = 2cn–1 |

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 2. а) | Из A в C за два прыжка можно попасть только одним способом: c1 = 1. |
| б) | Из A в A за два прыжка можно попасть двумя способами: a1 = 2. |
| в) | В A можно попасть из C двумя способами и из A двумя способами: an+1 = 2an + 2cn. |
| г) | В C можно попасть из A одним способом и из C — двумя: cn+1 = an + 2cn. |
| д) | В E можно попасть из C двумя способами: e2n = 2cn–1. |

Как же найти явную формулу для an и cn? Запишем наше рекуррентное соотношение (7) так:

|  |  |
| --- | --- |
| an+1 + cn+1√2 = (an + cn√2)(2 + √2) | (8) |

и — как вы уже, конечно, догадались — ещё так:

|  |  |
| --- | --- |
| an+1 – cn+1√2 = (an – cn√2)(2 – √2). | (9) |

Отсюда по индукции, пользуясь (7), получаем:

|  |
| --- |
| an + cn√2 = (2 + √2)n–1(a1 + c1√2) = (2 + √2)n, |
| an – cn√2 = (2 – √2)n–1(a1 – c1√2) = (2 – √2)n. |

Поэтому

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| cn = | (2 + √2)n – (2 – √2)n  2√2 | , |

а так как e2n = 2cn–1, получаем окончательно

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| e2n = | (2 + √2)n–1 – (2 – √2)n–1  √2 | , e2n–1 = 0. |

Задача решена. Неясно только, как в этой задаче (и в предыдущей задаче6) можно было додуматься до формул, содержащих ±√2, — ведь в задаче речь идёт о целых числах! (Для участников олимпиады и читателей «Кванта» задача7 была облегчена тем, что в формулировке указывался ответ — «Квант», 1979, №11, М595).

Однако «сопряжённые числа» возникли бы совершенно автоматически, если бы мы владели началами линейной алгебры (см.[12]), и применили стандартные правила этой науки к решению уравнений (7). Эти правила предлагают сначала выяснить, какие геометрические прогрессии (an = a0λn, cn = c0λn) удовлетворяют данному рекуррентному соотношению. Значения, для которых такие прогрессии существуют, — они называются характеристическими значениями или собственными числами — определяются из некоторого уравнения (оно тоже называется характеристическим). Для (7) характеристическое уравнение имеет вид λ2 – 4λ + 2 = 0, его корни — как раз 2 + √2 и 2 – √2. Зная эти корни, любое решение рекуррентного соотношения мы можем получить как «линейную комбинацию» соответствующих геометрических прогрессий ([11]). «Начальное условие» (в нашем случае a1 = 2, c1 = 1) определяет нужное нам решение однозначно.

Неудивительно, что даже самые простые рекуррентные целочисленные последовательности, для которых характеристическое уравнение — квадратное с целыми коэффициентами (примеры — те же (6) и (7) или последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., Fn+1 = Fn + Fn–1; см.[9], [10]), выражаются, как функции номера, с помощью «сопряжённых» квадратичных иррациональностей.

Заметим, что большее характеристическое число определяет скорость роста последовательности: при больши́х n в задаче7 en  (2 + √2)n/√2. Можно сказать это ещё так:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | en+1  en | = 2 + √2. |

Для задачи 6 аналогичное наблюдение:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | xn  yn | = √2. |

Интересное продолжение этого факта мы увидим в следующей задаче с бо́льшим числом «сопряжённых» иррациональностей.

Поочерёдно меняем все знаки

8. Пусть

(1 + √2 + √3)n = qn + rn√2 + sn√3 + tn√6,

где qn, rn, sn и tn — целые числа. Найти пределы

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | rn  qn | , | |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | sn  qn | , | |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | tn  qn | . |

Конечно, мы здесь можем выразить (qn+1; rn+1; sn+1; tn+1) через (qn; rn; sn; tn), пользуясь тем, что

qn+1 + rn+1√2 + sn+1√3 + tn+1√6 = (1 + √2 + √3)(qn + rn√2 + sn√3 + tn√6),

но, наученные опытом, мы уже знаем, что более простые формулы получаются не для самих чисел qn, rn, sn, tn, a для некоторых их комбинаций. Одну такую комбинацию мы уже знаем: это

qn + rn√2 + sn√3 + tn√6 = (1 + √2 + √3)n.

Нетрудно сообразить, каковы будут другие. Рассмотрим вместе с данным числом

λ1 = 1 + √2 + √3,

ещё три «сопряжённых»:

λ2 = 1 – √2 + √3, λ3 = 1 + √2 – √3, λ4 = 1 – √2 – √3.

Тогда

qn – rn√2 + sn√3 – tn√6 = λ2n,

qn + rn√2 – sn√3 – tn√6 = λ3n,

qn – rn√2 – sn√3 + tn√6 = λ4n.

Мы можем выразить qn, rn, sn, tn через λ1, λ2, λ3, λ4:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| qn = | λ1n + λ2n + λ3n + λ4n  4 | , |  | sn = | λ1n + λ2n – λ3n – λ4n  4√3 | , |
| rn = | λ1n – λ2n + λ3n – λ4n  4√2 | , |  | tn = | λ1n – λ2n – λ3n + λ4n  4√6 | . |

Теперь заметим, что λ1 > |λ2|, λ1 > |λ3|, λ1 > |λ4|. Поэтому

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | rn  qn | = | |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | 1 – (λ2/λ1)n + (λ3/λ1)n – (λ4/λ1)n  1 + (λ2/λ1)n + (λ3/λ1)n + (λ4/λ1)n | · | 1  √2 | = | 1  √2 | . |

Аналогично найдём, что

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | sn  qn | = | 1  √3 | и | |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | tn  qn | = | 1  √6 | . |

Мы говорили выше, что сопряжённые числа a ± b√d возникают часто как корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами. В связи с последней задачей возникает такое желание:

9. Написать уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен 1 + √2 + √3.

Возникает подозрение, что вместе с этим числом λ1 уравнению с целыми коэффициентами удовлетворяют и сопряжённые, которые в решении предыдущей задачи мы обозначили λ2, λ3, λ4. Нужное уравнение можно записать так:

(x – λ1)(x – λ2)(x – λ3)(x – λ4) = 0;

то есть

(x – 1 – √2 – √3)(x – 1 + √2 – √3)× (x – 1 – √2 + √3)(x – 1 + √2 + √3) = 0;

после преобразований получаем

((x – 1)2 – 5 – 2√6)·((x – 1)2 – 5 + 2√6) = 0, (x2 – 2x – 4)2 – 24 = 0, x4 – 4x3 – 4x2 – 16x – 8 = 0.

Именно такое уравнение получилось бы в качестве характеристического, если бы мы применили упомянутую мелким шрифтом в конце предыдущего раздела общую теорию к исследованию линейного преобразования

(qn; rn; sn; tn) → (qn+1; rn+1; sn+1; tn+1)

в предыдущей задаче. Заметим, кроме того, что мы на самом деле получили уравнение наименьшей степени (с целыми коэффициентами) с корнем λ1 = 1 + √2 + √3. Попробуйте это доказать!

Алгебраическое послесловие

Мы разобрали несколько примеров, в которых затрагивались пограничные вопросы алгебры, математического анализа и теории чисел. (Каждому направлению, которое мы наметили, можно было бы посвятить более подробную статью в «Кванте»!) В заключение покажем ещё, как можно смотреть на основных героев статьи — «сопряжённые числа» — с чисто алгебраической точки зрения.

Предположим, что у нас есть множество P чисел (или выражений с буквами, или ещё каких-то элементов), с которыми можно выполнять четыре действия арифметики с соблюдением обычных арифметических правил. Такое множество называется полем; поля образуют, например, рациональные и действительные числа. Если в поле P не разрешимо, скажем, уравнение x2 – d = 0, то можно расширить его, рассматривая элементы вида p + q√d, где p, q  P, a √d — новый символ, который при умножении сам на себя дает d, т.е. √d·√d = d, так что

(p + q√d)·(p' + q'√d) = (pp' + qq'd) + (pq' + qp')√d.

При d = –1 расширением поля вещественных чисел получаются комплексные числа.

В новом поле P1 — «квадратичном расширении» поля P — есть интересное отображение λ = p + q√d → λ = p – q√d (своеобразная «алгебраическая симметрия»), называемое сопряжением, с такими свойствами:

Все элементы старого поля P переходят в себя;

Все равенства, содержащие арифметические операции, при этом отображении сохраняются:

|  |  |
| --- | --- |
| λ + μ = λ + μ; λ · μ = λ · μ; | (10) |

Это отображение является частным случаем так называемых автоморфизмов Галуа расширения P1 поля P.

В задачах 8 и 9 мы видели пример «двукратного» расширения — присоединения √2 и затем √3, — в результате которого получилось поле с бо́льшим количеством автоморфизмов Галуа: кроме тождественного отображения, их уже три

(√2 → –√2, √3 → √3;√2 → √2, √3 → –√3;√2 → –√2, √3 → –√3),

и их «взаимодействие» устроено так же, как во множестве самосовмещений прямоугольника.

Оказывается, к основному полю можно присоединять корни любого алгебраического уравнения. Автоморфизмы возникающего нового поля — предмет одной из красивейших ветвей алгебры XIX–XX века, теории Галуа, которая позволяет, в частности, исследовать вопрос о разрешимости уравнений в радикалах ([13], [14]).

Мы закончим эту статью набором задач, в основном продолжающих уже затронутые темы, но требующих иногда и новых соображений, и обещанным списком литературы.

**Список литературы**

1. Л.Курляндчик, А.Лисицкий. «Суммы и произведения» («Квант», 1978, №10). назад к тексту

2. Второе решение задачи М514 («Квант», 1979, №5, с.26). назад к тексту

3. Р.Нивен. «Числа рациональные и иррациональные» (М., «Мир», 1966). назад к тексту

4. Д.Фукс, М.Фукс. «О наилучших приближениях» («Квант», 1971, №6, №11) и «Рациональные приближения и трансцендентность» («Квант», 1973, №1). назад к тексту

5. Н.Васильев, В.Гутенмахер. «Прямые и кривые» (М., «Наука», 1978), с.103–105. назад к тексту

6. А.Н.Маркушевич. «Ряды» (М., «Наука», 1979). назад к тексту

7. Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly (М., «Мир», 1977), с.560–561. назад к тексту

8. Л.Курляндчик, Г.Розенблюм. «Метод бесконечного спуска» («Квант», 1978, №1). назад к тексту

9. В.Березин. «Филлотаксис и последовательность Фибоначчи», («Квант», 1979, №5, с.53). назад к тексту

10. Н.Н.Воробьев. «Числа Фибоначчи» (Популярные лекции по математике, вып.6) (М., «Наука», 1978). назад к тексту

11. А.И.Маркушевич. «Возвратные последовательности» (Популярные лекции но математике, вып.1) (М., «Наука», 1978). назад к тексту

12. Л.И.Головина. «Линейная алгебра и некоторые её приложения» (М., «Наука», 1979). назад к тексту

13. М.М.Постников. «Теория Галуа» (М., Физматгиз, 1963). назад к тексту

14. Ван-дер-Варден. «Алгебра» (М., «Наука», 1976). назад к тексту