Цель пособия

Цель создания данного пособия – на разных задачах, имеющих вероятностный характер, показать наиболее типичные алгоритмы их решения. С тем, чтобы не столько научить студента решать подобные задачи, сколько пробудить в нём интерес к теории вероятности.

На базе этого материала можно решать более сложные задачи теории вероятности.

Пособие будет полезным для самостоятельной работы студентов любых курсов специальностей: экономика, менеджмент, психология.

Раздел 1. Элементы комбинаторики

Соединения – это группы элементов некоторого конечного множества.

В элементарной алгебре рассматриваются 3 вида соединений: размещения, перестановки и сочетания [2]-[5]. Остановимся на вопросе о подсчёте числа таких комбинаций.

Размещения – упорядоченные m-элементные подмножества данного множества из n элементов (m<n), отличающиеся друг от друга порядком следования элементов или хотя бы одним элементом. Например, из 3-х цифр 7,8,9 можно составить 3 числа по одной цифре: 7, 8, 9 , – шесть чисел по 2 цифры:



Число всех возможных комбинаций из n элементов по m обозначается (arrangement(фр.) - размещение) и вычисляется по формуле:



Перестановки – упорядоченные n-элементные соединения из n элементов данного множества, отличающиеся лишь порядком элементов. Число перестановок из n элементов

(1.2)



Например,



и т.д.



Сочетания – неупорядоченные m-элементные соединения из n элементов данного множества, отличающиеся хотя бы одним элементом. Число различных сочетаний из n элементов по m обозначается символом (combinare (лат.) - соединять).



(1.3)



Например,



Используя основное свойство числа сочетаний , мы упростим вычисления



.



Кроме этого свойства числа сочетаний часто используется следующее:

.



Кроме того, принята, по определению, запись:



Задачи

Задача №1. В розыгрыше первенства страны по футболу приняло участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотые и серебряные медали?

Решение. Золотую медаль может получить одна из 16 команд. После чего одна из 15 команд может иметь серебряную медаль. Общее число способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали, равно (правило произведения).



Задача №2. В кафе предлагают 5 первых блюд, 6 вторых и 4 третьих. Сколькими способами можно составить обед?

Решение. Согласно правилу произведения число способов равно

.



Задача №3. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков (все уроки разные). Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

Решение. Здесь нужно воспользоваться формулой размещения из 10 элементов по 6:

.



Задача №4. Сколькими способами можно разделить 6 шоколадок 14 лицам? (1 место – 1 плитка).

Решение.

1.Все плитки различны. Число способов равно числу размещений из 14 по 6:

.



2.Все плитки одинаковы. Число способов равно числу сочетаний из 14 по 6:



Задача №5. В группе 20 мальчиков и 20 девочек. Все умеют петь, танцевать, декламировать. Сколькими способами можно составить дуэты из учащихся групп?

Решение. Число способов выбрать из 20 мальчиков певца, танцора и декламатора равно числу размещений из 20 по 3 - . Аналогично из 20 девочек: . Общее число способов выбора дуэтов певцов, танцоров и декламаторов по правилу произведения равно способов.



Задача №6. Необходимо укомплектовать экипаж космического корабля в составе: командир корабля, I его помощник, II его помощник, 2 бортинженера, 1 врач. Командующая тройка может быть отобрана из 25 готовящихся к полёту лётчиков; 2 бортинженера – из 20 специалистов, в совершенстве знающих устройство космического корабля; врач – из числа 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж корабля?

Решение.

.



Задача №7. Из 30 последовательных натуральных чисел: 1, 2, 3, … 30 выбирают 3 числа так, чтобы их сумма была чётной. Сколько способов такого выбора?

Решение. Сумма трёх чисел чётная, если все они чётные или из трёх 2 нечётные и 1 чётное. Например,

2 + 4 + 6 =12 и 3 + 5 + 2 = 10.

Следовательно, число способов необходимого выбора равно сумме числа сочетаний из 15 чётных чисел по 3 и числа сочетаний из 15 нечётных чисел по 2, умноженного на число чётных, т.е. 15.

.



Задача №8. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?

Решение. Один из способов показан на рисунке, а общее число способов равно числу перестановок из восьми:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  | Ξ |
|  | Ξ |  |  |  |  |  |  |
|  |  | Ξ |  |  |  |  |  |
| Ξ |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | Ξ |  |  |
|  |  |  | Ξ |  |  |  |  |
|  |  |  |  | Ξ |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | Ξ |  |

рис.1



Задача №9. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько разных стартовых пятёрок может образовать тренер?

Решение. Т.к. нас интересует только состав, то имеем:



Раздел 2. Классическое определение вероятности (теория урн)

Вероятностью Р(А) события А называется отношение числа m результатов (исходов) эксперимента, благоприятствующих появлению события А, к числу n всех равновозможных результатов эксперимента:

(2.1)



При этом .



Например, вероятность выпадения числа при одном бросании правильной монеты равна 1/2.

Задачи

Используя формулы и результаты решения задач раздела 1, решим задачи на вычисление вероятности события (по классическому определению).

Задача №10. В урне 3 синих, 8 красных и 9 белых шаров, не различимых на ощупь. Шары тщательно перемешаны. Наудачу достают 1 шар. Найти варианты событий: извлечённый шар красный (событие А), синий (событие B), белый (событие С).

Решение. Всего исходов эксперимента, состоящего в извлечении одного шара, 20=3+8+9, т.е. в формуле (2.1), n=20. Событию А благоприятствует 8 исходов, т.е. mА=8, аналогично mВ=3, mС=9.

По формуле (2.1) имеем:



Примечание. Если сложить полученные вероятности, то получим 1, т.е. Р(А) + Р(В) + Р(С) = 1, что говорит о том, что А, В и С составляют полную группу событий (см. раздел 3).

Задача №11. В расписании 3 лекции по разным предметам. Всего на курсе изучается 10 предметов. Какова вероятность того, что студент, не знакомый с расписанием, угадает его, если все варианты составления расписания на день равновозможные.

Решение. Всего комбинаций из 3-х предметов, выбранных из 10 и отличающихся друг от друга хоть одним предметом или порядком их следования, т.е. размещений из десяти элементов по три, можно получить:

.



Нам нужна только одна комбинация вероятность угадать расписание:



.



Задача №12. На 8-ми одинаковых карточках написаны 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Найти вероятность того, что образованная из 2-х чисел дробь сократима.

Решение. Всех исходов столько, сколько есть вариантов выбора двух карточек из 8 одинакового формата ⇒ . Из них только карточек благоприятствуют событию А, т.к. только 5 чисел 2, 4, 6, 8, 12 сократимы ⇒ .



.



Задача №13. Из 60 экзаменационных вопросов студент подготовил 50. Найти вероятность того, что вытянутый билет из 2 вопросов будет состоять из подготовленных вопросов.

Решение.



Задача №14. Из 30 карточек с буквами русского алфавита наудачу выбирают 4 карточки. Чему равна вероятность того, что эти 4 карточки в порядке выхода составят слово "небо"?

Решение.

15.



Задача №15. На полке расставлено наудачу 10 книг. Определить вероятность того, что 3 определённые книги окажутся рядом.

Решение.

.



Пояснение. При вычислении m три указанные книги принимаем за одну.

Задача №16. В лотерее 1000 билетов. Из них 500 выигрывают, 500 проигрывают. Куплено 2 билета. Найти вероятность того, что оба билета выиграют.

Решение. Пусть случайное событие А={2 билета выигрывают}, тогда:



Задача №17. Наудачу выбирается 5-тизначное число. Какова вероятность события:

А = {число симметрично относительно центральной цифры};

В = {число кратно 5};

С = {число состоит из нечётных цифр}.

Решение. Всего пятизначных чисел: (правило произведения).



Задача №18. В коробке 15 одинаковых изделий, 5 из них окрашены. Наугад извлекают 3 изделия. Найти вероятность того, что

* 1. все 3 изделия окрашены;
  2. одно изделие окрашено.

Решение. Рассмотрим события:

А1 = {все 3 изделия окрашены};

А2 = {из всех 3 изделий только 1 окрашено}.



Задача №19. Среди 12-ти студентов, 7 из которых девушки, раздают 5 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов будут 3 девушки (событие А).

Решение.



Задача №20. Из колоды карт (36 штук) наудачу извлекают 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется туз.

Решение.

.



Задача №21. Из 10 изделий, из которых 3 бракованные, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятность того, что:

a)в полученной выборке все изделия бракованные;

b)в полученной выборке 2 изделия бракованные.

Решение.

А={в полученной выборке все изделия бракованные};

B={в полученной выборке 2 изделия бракованные};

.



Задача №22. Дано пять отрезков, длины которых составляют соответственно 1, 3, 5, 7, 9. Определить вероятность того, что из взятых наудачу 3-х отрезков из данных пяти можно построить треугольник (событие А).

Решение. Всего отобрать 3 отрезка из заданных 5-ти можно вариантами, т.е. ; благоприятных (ab>c или a-b<c) только 3: (3,5,7), (3,7,9), (5,7,9)



.



Задача №23. Кандидаты в студенческий совет: 3 – от I-го курса, 5 – от II-го, 7 – от III-го. Выбираются наудачу 5 человек на конференцию. Найти вероятность того, что делегация будет состоять из 1-го первокурсника, 2-х второкурсников, 2-х третьекурсников.

Решение. Пусть А = {делегация состоит из 1-го первокурсника, 2-х второкурсников, 2-х третьекурсников}.

Тогда:



Задача №24. Наугад выбирают 6 клеток из 49 (спортлото). Найти вероятность того, что будет правильно угадано 3 клетки (событие А), 6 клеток (событие В).

Решение.



Раздел 3. Алгебра событий

Исходя из определения суммы и произведения событий, совместных и несовместных событий, зависимых и независимых событий, основных теорем алгебры событий [1],[2] запишем основные формулы, связанные с ними.

Пусть рассматриваются события А и В, которые могут произойти в данном эксперименте с вероятностью Р(А) и Р(В) соответственно.

Если эти события несовместны, то имеет место формула:

Р(А+В)=Р(А)+Р(В). (3.1)

Если события А и В совместные, то:

Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ). (3.2)

Если события А и В независимые, то:

, (3.3)



в противном случае

(3.4)



Здесь Р(В/А) и Р(А/В) – условные вероятности.

Задачи

Задача №25. Вероятность попадания стрелком в I-ю область мишени равна 0,45, во II-ю – 0,35, в III-ю – 0,15. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадёт в I-ю или во II-ю область мишени (рис.2).

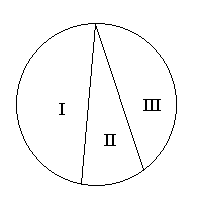


Рис.2

Решение. Пусть:

А1 ={попадание в I-ю область},

А2 ={попадание во II-ю область}.

События А1 и А2 несовместны при одном выстреле. Поэтому



Задача №26. Из 10 тыс. лотерейных билетов:

10 – по 200 грн., 100 – по 100 грн.,

500 – по 25 грн., 1000 – по 5 грн. выигрыша.

Найти вероятность того, что купленный билет будет содержать выигрыш не менее 25 грн.

Решение. Пусть события:

А = {выигрыш в случайно купленном билете не менее 25 грн.};

А1 ={выигрыш составил 25 грн.};

А2 ={выигрыш составил 100 грн.};

А3 ={выигрыш составил 200 грн.};

Тогда вероятность выигрыша 25 грн.

### .



### Аналогично,



Очевидно, что событие А представляет собой сумму событий А1, А2, А3, несовместных между собой, поэтому:

Р(А) = Р(А1) + Р(А2) + Р(А3) = 0,061.

Задача №27. В первом ящике 2 белых и 10 чёрных шаров. Во втором ящике 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждого вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Пусть:

А={белый шар из 1го ящика};

В={белый шар из 2го ящика}.

Тогда:



События A и В независимы



.



Задача №28. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания для 1-го стрелка (событие А) равна 0,75, для 2-го (событие В) – 0,8, для 3-го (событие С) – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель (событие D).

Решение. События A, B, C – независимы



Задача №29. В условиях задачи №28 найти вероятность того, что в цель попадёт хотя бы один стрелок (событие R).

Решение. Найдём вероятность того, что в цель не попадёт ни один стрелок (событие ).



Т.к. - событие, противоположенное событию R, оно равно



Задача №30. Найти вероятность попадания стрелком в цель при одном выстреле (событие В), если вероятность события

А={хотя бы одно попадание в цель при 4-х выстрелах}=0,9984

### Решение

### =0,9984,



### = {ни одного попадания в цель при 4-х выстрелах}



Вероятность непопадания при одном выстреле равна:



Окончательно получаем:

=



Задача №31. Студент обходит 3 библиотеки. Вероятность того, что книга есть в каждой из 3-х библиотек равна р1, вероятность того, что имеющаяся книга не выдана, равна р2. Какова вероятность того, что студент достанет книгу хотя бы в одной из библиотек.

Решение.

А1 = {достанет книгу в 1-ой библиотеке};

А2 = {достанет книгу во 2-ой библиотеке};

А3 = {достанет книгу в 3-й библиотеке};

В1 = {книга есть};

В2 = {книга не выдана};

= {не достанет ни в одной библиотеке}.



– вероятность того, что студент достанет книгу хотя бы в одной библиотеке.



Задача №32. Охотник выстрелил 3 раза по удалённой цели. Вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,8. Вероятность попадания в цель после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность попадания в цель 2 раза (событие D).

Решение. Пусть

A= {попадание в цель при 1-ом выстреле};

B= {попадание в цель при 2-ом выстреле};

C={попадание в цель при 3-ем выстреле}.

Тогда

P {A} = 0,8; P {B} = 0,7; P {С} = 0,6.



.



Задача №33. Вероятность того, что первый из 3-х человек придет, равна 0,8. Вероятность того, что второй придет, равна 0,4. Вероятность того, что придёт третий, равна 0,7. Найти вероятность того, что встреча состоится, если для этого нужно, чтобы пришли хотя бы двое из трёх.

Решение. Пусть

A={придёт первый};

B={придёт второй};

C={придёт третий};

## D={придут хотя бы двое из трёх}.

Тогда:



Ответ: 0,488.

Задача №34. В зависимости от наличия сырья предприятие может отправить заказчикам в сутки определённое количество продукции от 1 до 100 ед. Найти вероятность того, что полученное количество продукции можно распределить без остатка:

1. 3-м заказчикам (событие А);
2. 4-м заказчикам (событие В);
3. 12-ти заказчикам (событие С);
4. 3-м или 4-м заказчикам (событие D).

Решение.



C=AB, D=AB.



События А и В совместные



Задача №35. Рабочий обслуживает 2 станка. В течение 8-ми часов каждый из станков приостанавливается по разным причинам. Получасовые остановки равновероятны. Найти вероятность того, что в данный момент времени только 1 станок работает. Найти вероятность того, что работают оба станка.

Решение.

С={в данный момент работает только один станок};

D={в данный момент работают оба станка};

A1={работает первый станок};

A2={работает второй станок}.



Задача №36. В читальном зале 6 учебников по теории вероятностей (т.в.). Из них 3 – в переплете. Библиотекарь наудачу взял 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника в переплете.

Решение. Пусть события:

A= {I-ый учебник в переплете}

B={II-ой учебник в переплете}

С={оба учебника в переплете}.

Тогда:



Иначе:



Задача №37. В ящике детали 3-х сортов: 5 – I-го сорта, 4 – II-го, 3 – III-го. Из ящика наудачу извлекается 1 деталь и не возвращается в ящик. Найти вероятность того, что при первом испытании появится деталь I-го сорта (событие А), при втором испытании – II-го сорта (событие В), при третьем – третьего сорта (событие С).

Решение.

(всего деталей 12)



Задача №38. Вероятность попадания в 1-ю мишень (событие А) для данного стрелка равно 2/3. Если стрелок попал в первый раз, то он получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при 2-х выстрелах равна 0,5. Найти вероятность поражения второй мишени.

Решение. Пусть:

А={поражение 1-й мишени};

В={поражение 2-й мишени};

С={поражение обеих мишеней}.

, но т.к. А и В – события зависимые, то:



По условию,



Задача №39. 4% всей продукции – брак. 75% небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта. Найти вероятность того, что выбранное изделие первого сорта.

Решение.

Пусть:

A={изделие первого сорта};

В={изделие небракованное};

Тогда:



Задача №40. Абонент набирает наугад последнюю цифру телефона. Определите вероятность того, что:

* 1. В1 ={придется звонить не более 3-x раз};
  2. В2 ={то же, но при условии, что неизвестная цифра нечётная}.

Решение. А1 ={в 1 раз набрал нужную цифру};

А2 ={во 2-й раз набрал нужную цифру};

А3 ={в 3-й раз набрал нужную цифру}.

Вероятность того, что за 3 раза он не набрал нужную цифру, равна:



Вероятность того, что в течение этих 3-х раз набрал хотя бы один раз нужную цифру, равна:



При условии, что набираемая цифра нечётная, имеем:



Задача №41. В лотерее имеются 10 билетов, из них 5 билетов стоимостью по 1 грн, 3 билета – по 3 грн, 2 билета – по 5 грн. Наудачу берут 3 билета. Найти вероятность того, что хотя бы 2 из этих билетов имеют одинаковую стоимость.

Решение. Всего способов выбрать 3 билета из 10-ти

.



Обозначим A={все 3 билета разные}.

###### Тогда:



Событие {хотя бы 2 билета одинаковой стоимости} является противоположным событию А, поэтому:



Задача №42. Спортсмены на соревнованиях делают 1 упражнение с 3-х попыток. Вероятность успешного выполнения 1-й попытки равна 0,8. Вероятность успешного выполнения 2-й попытки равна 0,7. Вероятность успешного выполнения 3-й попытки равна 0,4. Найти вероятность того, что спортсмен успешно выполнить это упражнение (событие А).

Решение.

А1 = {успех в 1-й попытке};

А2 = {успех во 2-й попытке};

А3 = {успех в 3-й попытке}.



Иначе:



Задача №43. 68% мужчин, достигших 60-летия, достигают и 70-летия. Найти вероятность того, что 60-летний мужчина не достигнет своего 70-летия.

Решение. Пусть: событие А={60-летний мужчина достигнет своего 70- летия}, тогда: {60-летний мужчина не достигнет своего 70-летия}.



Р()Р(А)= =0,32.



Задача №44. В лотерее n билетов, из которых m – выигрышные. Вы приобрели k билетов. Найти вероятность того, что:

а) среди k билетов ровно l выигрышные (событие А);

б) среди k билетов хотя бы 1 выигрышный (событие В).

Решение.

а)



б) {среди k билетов ни одного выигрышного}



вероятность того, что среди k билетов хотя бы один выигрышный, равна:



Задача №45. В некотором обществе 70% людей – курят, 40% – с больными лёгкими, 25% – и курят, и болеют. Найти вероятность того, что наудачу взятый человек из этого общества:

a) не курит, но с больными лёгкими;

b) курит, но не болеет;

c) не курит и не болеет;

d) курит и болеет;

e) или курит, или болеет.

Решение.

Пусть А={человек курит};

В={человек с больными лёгкими}.

Тогда:

P(A)=0,7; P(B)=0,4; P(=0,25.



Имеем:



а)



b)



c)



d)



e)



Задача №46 (о легкомысленном члене жюри).

В жюри из 3-х человек 2 члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью р, а третий для вынесения решения бросает монету. Окончательное решение выносится большинством голосов.

Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью р. Какое из этих жюри вынесет справедливое решение с большей вероятностью?

Решение. Пусть оба (из 3-х) членов жюри сходятся во мнениях, тогда вероятность справедливого решения равна . При этом результат голосования 3-го жюри несущественен. Если судьи расходятся во мнениях, то вероятность справедливого решения 2-х судей – . Полная вероятность вынесения справедливого решения жюри из 3х членов равна:



2р(1-р)р2 р-р2 р.



Вывод: Оба типа жюри имеют одинаковую вероятность вынести справедливое решение.

Раздел 4. Основные теоремы теории вероятности

4.1 Формула полной вероятности

Группа гипотез – полная группа несовместных событий (пусть это будет Н1, Н2 , …, Нn). Пусть событие А может наступить лишь при появлении одного из них. Тогда вероятность события А вычисляется по формуле:

(4.1)



которая называется формулой полной вероятности.

Здесь: - вероятности гипотез;



-условные вероятности события А.



Задачи

Задача №47. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнения квалификационной нормы равна: для лыжников – 0,9, для велосипедистов – 0,8, для бегунов – 0,75.

Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наудачу, выполнит норму.

Решение.

А = {спортсмен выполнил норму};

Н1 = {выполнил лыжник};

Н2 = {выполнил велосипедист};

Н3 = {выполнил бегун}.



Задача №48. Стрельба производилась по 3-м мишеням. По 1-ой – 5 раз, по 2-ой – 3 раза, по 3-ей – 2 раза. Вероятность попадания по 1-ой мишени равна 0,4, по 2-ой мишени – 0,1, по 3-ей – 0,12. Найти вероятность одного попадания в мишень.

Решение. Пусть A = {попадание в мишень при одном выстреле}

H1 = {стреляли в 1-ю мишень} P(H1) = 0,5

H2 = {стреляли в 2-ю мишень} P(H2) = 0,3

H3 = {стреляли в 3-ю мишень} P(H3) = 0,2

P(A/H1) = 0,4 P(A/H2) = 0,1P(A/H3) = 0,12

По формуле (4.1) имеем: .



Задача №49. В лаборатории 3 одинаковых клетки. В 1-й - 3 белых и 7 коричневых мыши, во 2-й – 5 белых и 6 коричневых. В 3-й – 7 белых и 2 коричневых. Случайным образом берут из одной клетки мышь. Найти вероятность того, что выбрана белая мышь (событие А).

Решение. Пусть имеется 3 гипотезы:

Н1 = {выбрана мышь из 1-й клетки};

Н2 = {выбрана мышь из 2-й клетки};

Н3 = {выбрана мышь из 3-й клетки};

Р(Н1)= Р(Н2)= Р(Н3)=1/3

Условные вероятности события А будут равны:

Р(А/Н1)= 3/10; Р(А/Н2)=5/11; Р(А/Н3)=7/9.

По формуле (4.1) имеем:



Задача №50. Судостроительный завод получает от 3-х предприятий детали: от предприятия В – 60%, от С – 30%, от D – 10%. При этом на каждом из этих предприятий допускается брак, соответственно на В – 4%, на С – 5%, и на D – 6%. Какова вероятность того, что случайно выбранная деталь будет бракованной (событие А), если известно, от какого предприятия она поступила.

Решение. В качестве гипотез событий примем:

Н1 = {деталь поступила от предприятия В};

Н2 = {деталь поступила от предприятия С};

Н3 = {деталь поступила от предприятия D}.

Р(Н1) = 0,6; Р(Н2) = 0,3; Р(Н3) = 0,1



Условные вероятности события А равны соответственно:

Р(А/Н1)= 0,04;Р(А/Н2)=0,05;Р(А/Н3)=0,06.

По формуле (4.1) имеем:



Задача №51. В магазин поступили телевизоры от 5-ти фирм в следующем количестве:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Фирма | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Количество телевизоров | 5 | 10 | 6 | 8 | 11 |
| Рi | 0,98 | 0,8 | 0,6 | 0,3 | 0,1 |

Рi – вероятности того, что телевизоры исправны.

Найти вероятности того, что купленный наугад телевизор исправно работает (событие А)

Решение.

1) В качестве гипотез выберем события:

{телевизор i-й фирмы}, (i=).



2) Найдём вероятности гипотез, учитывая, что п=40:

Р(Н1) = 5/40; Р(Н2) = 10/40; Р(Н3) = 6/40; Р(Н4) = 8/40; Р(Н5) = 11/40.

3) Условные вероятности равны:

Р(А/Н1) = 0,98; Р(А/Н2) = 0,8; Р(А/Н3) = 0,6; Р(А/Н4) = 0,3; Р(А/Н5) = 0,1.

4) По формуле (4.1) имеем:



Задача №52. Имеются 3 одинаковых ящика, в каждом из которых по 20 однотипных деталей. Определить вероятность того, что извлечённая из наугад выбранного ящика деталь стандартная (событие А), если известно, что в 1-м ящике 18 стандартных деталей, во 2-м – 17, в 3-м – 16.

Решение. Если в качестве i-й гипотезы (i = 1,2,3) выбрать событие

Нi = {деталь из i-го ящика}, то Р(Нi) =1/3.

Р(А/Н1) = 18/20;

Р(А/Н2) = 17/20;

Р(А/Н3) = 16/20.

По формуле (4.1) имеем:



4.2 Формула Байеса (формула переоценки вероятности гипотез)

Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одной из гипотез (см п.4.1). Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса:



(4.2)



Задачи

Задача №53. 70% населения обследуемого региона имеет только среднее образование, среди которых 10% безработных, 30% населения – с высшим образованием, среди них 2% безработных. Если выбранный наугад человек является безработным, то какова вероятность того, что он закончил ВУЗ?

Решение. В качестве гипотезы примем:

Н1 = {выбранный наугад человек со средним образованием};

Н2 = { выбранный наугад человек со высшим образованием }.

Р(Н1) = 0,7; Р(Н2) = 0,3.

Пусть соб. А = {выбранный наудачу человек безработный}, тогда

P(A/H1) = 0,1, P(A/H2) = 0,02.

Нужно определить P() по формуле (4.2).



Имеем:



Задача №54. На сборочный конвейер поступили детали с 3-х станков, производительность которых неодинакова: I-го – 50% плана, II-го – 30% плана, III-го – 20% плана. Вероятность получения годного узла равна 0,92, если деталь I-го станка, 0,95,если деталь со II-го станка, 0,82, если деталь с III-го станка. Определить вероятность того, что в сборку попали детали, изготовленные на первом станке, если узел годный.

Решение. А = { узел годный};

Н1 = {деталь с I-го станка};

Н2 = {деталь со II-го станка};

Н3 = {деталь с III-го станка};

Р(Н1)=0,5; Р(Н2)=0,3; Р(Н3)=0,2.

Р(А/Н1)=0,92; Р(А/Н2)=0,95; Р(А/Н3)=0,82.



Задача №55. 30% приборов собирают специалисты высокой квалификации, 70% - средней квалификации. Надёжность работы прибора, собранного специалистом высокой квалификации – 0,9, а специалистом средней квалификации – 0,8. Взятый наугад прибор оказался надёжным. Определить вероятность того, что прибор собран специалистом высокой квалификации.

Решение.

Пусть событие А = {прибор работает безотказно}.

До проверки прибора возможны 2 гипотезы:

Н1 = {прибор собран специалистом высокой квалификации};

Н2 = { прибор собран специалистом средней квалификации }.

Р(Н1) = 0,3, Р(Н2) = 0,7.

Условные вероятности события А равны:

P(A/H1) = 0,9, P(A/H2) = 0,8.

Пусть событие А произошло, тогда

.



Задача №56. Из 10 учащихся, которые пришли на экзамен по математике (нужно было подготовить 20 вопросов), трое подготовились на отлично (выучив по 20 вопросов), четверо – на хорошо, выучив по 16 вопросов, двое – на удовлетворительно, выучив по 10 вопросов, один не готовился и может ответить на 5 вопросов из 20. В билете 3 вопроса. Первый ученик ответил на все 3 вопроса своего билета. Какова вероятность того, что этот ученик подготовился на отлично?

Решение. Пусть событие А = {1-й ученик ответил на 3 вопроса} и гипотезы:

Н1 = {1-й ученик подготовлен на 5};

Н2 = {1-й ученик подготовлен на 4};

Н3 = {1-й ученик подготовлен на 3};

Н4 = {1-й ученик подготовлен на 2}.

P(H1) = 0,3; P(H2) = 0,4; P(H3) = 0,2; P(H4) = 0,1

P(А/H1) = 1 (событие {1-й ученик ответил на 3 вопроса, при условии, что он выучил 20 из 20}, является достоверным).

(вероятность правильного ответа на 1-й вопрос равна 16/20, на 2-й – 15/19, на 3-й – 14/18).



По формуле (4.2) имеем:



Вывод: учителю придётся предложить ученику ещё дополнительные вопросы.

Раздел 5. Случайные величины (с.в.)

5.1 Дискретные случайные величины

Дискретной случайной величиной называют случайную величину, возможные значения которой есть изолированные числа (число их может быть конечным или бесконечным для счетного множества).

Зависимость вероятностей от возможных значений с.в. есть закон распределения дискретной с.в., который может быть представлен в виде ряда распределения, многоугольника распределения, функции распределения с.в.

При этом название закона распределения диктует формула, по которой вычисляются вероятности, соответствующие возможным значениям С.В. Ниже приведены наиболее часто встречающиеся на практике:

* биномиальный закон распределения дискретной с.в. X – числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p. Вероятность возможного значения Х= k по формуле Бернулли равна:

(5.1)



* если n велико, а p в каждом испытании очень мало, то используется приближённая формула (распределение Пуассона):

, np (5.2)



Здесь

.



* если вероятность появления события А в каждом испытании p (), а Х – число испытаний до появления события А в серии независимых повторных испытаний, то пользуются формулой:



(5.3)



Ряд вероятностей этого распределения будет бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем q<1 и суммой, равной единице. Такое распределение называется геометрическим;

* в задачах статистического контроля качества часто используется гипергеометрический закон распределения дискретной с.в. При этом применяется формула:

(5.4)



Здесь из совокупности n элементов, которая содержит m элементов определённого свойства (напр., среди n деталей ровно m бракованных), отбираются случайным образом k элементов. P(X=l) – это вероятность того, что среди k отобранных элементов ровно l элементов с определённым свойством.

* Кроме указанных законов распределения, на практике используются числовые характеристики с.в.:
  + - математическое ожидание M(X);
    - дисперсия D(X);
    - среднее квадратическое отклонение X).



(5.5)



(5.6)



(5.7)



(5.8)



Для биномиального распределения (формула (5.1)) имеем:

M(X)=np (5.9)

D(X)=npq (5.10)

Для распределения Пуассона (формула (5.2)):

M(Х)=D(Х)=np= (5.11)



Задачи

Задача №57. В партии из 6-ти деталей 4 стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной с.в. Х – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти числовые характеристики с.в. Х.

Решение. Имеем гипергеометрический закон распределения с.в. Х:

Возможные значения Х:



Соответствующие вероятности вычисляются по формуле (5.4):

=



Имеем ряд распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х: |  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0 |  |  |  |



Многоугольник распределения.

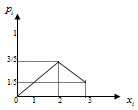


рис.3

Функцией распределения F(х) называется вероятность того, что с.в. Х в результате испытаний примет значение, меньшее х: F(x)=P(X<x)

В нашем случае имеем:

если х1, то F(x)=0,



если 1<x2, то F(x)=,



если 2<x3, то F(x)=



если х>3, то F(x)=.



График этой функции на рис.4.

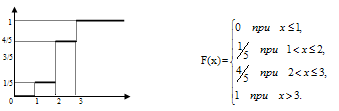


рис.4

Математическое ожидание (по формуле (5.5)):



Дисперсия (по формуле (5.7)):



Среднее квадратическое отклонение (по формуле (5.8 )):



Задача №58. В денежной лотерее 100 билетов, из них 1 составляет выигрыш в 50 грн, 10 – в 1 грн. Составить закон распределения с.в. Х – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Вероятность выигрыша 1 грн равна

,



аналогично получим

, .



Имеем ряд распределения с.в. Х:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 50 |
|  | 0,89 | 0,1 | 0,01 |

Многоугольник распределения с.в. Х:

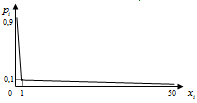


рис.5

Функция распределения.

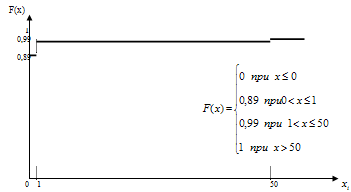


рис.6

Задача №59. Среди 20-ти изделий 5 бракованных. Случайным образом выбираются 3 изделия для проверки их качества. С.в. Х – число бракованных изделий. Построить ряд распределения Х, найти М(Х), D(X), если Х=0,1,2,3.

Решение.



Имеем ряд распределения с.в. Х.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

Х:



Задача №60. Вероятность того, что расход воды на некотором предприятии окажется нормальным (не более определённого числа литров в сутки), равна . Найти вероятности того, что в ближайшие 6 дней расход воды будет нормальным в течение 1-го, 2-х, 3-х, 4-х, 5-ти, 6-ти дней.



Решение. Пусть с.в. Х – число дней, в течение которых расход воды будет нормальным. Тогда вероятности, соответствующие возможным значениям Х (от 1 до 6), будут вычисляться по формуле Бернулли (5.1) и распределение с.в. Х будет биномиальным.



Примечание: при вычислениях вероятностей удобно использовать формулу



Строим ряд распределения с.в. Х.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | 0,004 | 0,033 | 0,132 | 0,297 | 0,356 | 0,178 |

Строим многоугольник распределения с.в.Х.

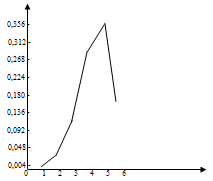


рис.7

Очевидно, что наиболее вероятен перерасход воды в течение одного или двух дней из 6-ти.

Наиболее вероятным является нормальный расход воды в течение 5-ти дней:

Р(Х=5)=0,356.

называется модой () с.в. Х.



Строим функцию F(x) распределения с.в. Х.

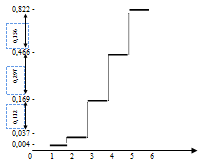


рис.8



Функция распределения аналитически может быть записана так:

F(x)



Задача №61. Игральная кость брошена три раза. Построить ряд и функцию распределения с.в. Х – возможного числа появления шестёрок.

Решение. Имеем схему Бернулли с

, , n=3.



; .



Ряд распределения Х имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

Функция F(х) распределения с.в. Х имеет вид:

F(х)=



Строим график:

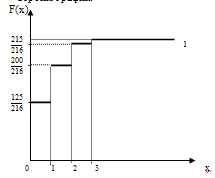


рис.9

Задача №62. Подлежат исследованию 1200 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе равна р=0,09. Найти математическое ожидание и дисперсию числа проб с промышленным содержанием металла.

Решение. Пусть с.в. Х – число проб с промышленным содержанием металла, тогда c.в. Х распределена по биномиальному закону.

Математическое ожидание вычисляем по формуле (5.9), дисперсию, соответственно, по формуле (5.10 ):



.



Задача №63. Тираж учебников составляет экземпляров. Вероятность неверного брошюрования учебника равна Записать ряд бракованных учебников среди данного тиража для возможных значений Х от 1 до 5.



Решение. Здесь



По формуле (5.2) мы получим все интересующие нас вероятности:



Имеем ряд распределения с.в. Х (закон Пуассона).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Так, (принимаем ).



Математическое ожидание числа бракованных экземпляров среди 10 книг при равно:



Задача №64. Вероятность того, что с конвейера сойдёт k бракованных деталей равна . Построить ряд распределения для с.в. k и найти её математическое ожидание.



Замечание. для решения этой задачи понадобятся первоначальные сведения из теории рядов, или, по крайней мере, знание бесконечной убывающей прогрессии.

Решение.

1. Строим ряд распределения с.в. k – числа бракованных деталей с конвейера (геометрический закон).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| K: |  | 1 | 2 | 3 | 4 | … | n | … |
|  | 0,3 |  |  |  | … |  | … |

2.



Мы получим М(Х), если бесконечная сумма – ряд сходится.

Воспользуемся признаком Даламбера для знакоположительных рядов.



ряд сходится и М(Х) – его сумма.



Для её нахождения применим искусственный приём:



+ . . .



Примечание. Каждая бесконечная сумма в скобках в правой части равенства для М(Х) вычисляется по формуле для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии ().



Задача №65. Мишень вращается вокруг оси Ох. При достаточно большой угловой скорости вращения стрелок не в состоянии различить цифры. Стреляет наугад. Секторы одинаковы. Выигрыш соответствует номеру сектора.

Стоит ли ему участвовать в такой игре, если за право стрелять один раз надо платить 5 грн?

Решение.



рис.10

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х: |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Вероятности всех возможных значений Х равны между собой и равны



Найдём

.



Стоимость выстрела 5 грн. Очевидно, стрелять много раз невыгодно.

Задача №66. Дискретная с.в. Х принимает только 3 возможных значения: 1,

, . ().



Найти закон распределения с.в. Х, если

М(Х)=2,2 и D(X)=0,76.

Решение.

1. Запишем ряд распределения для Х, найдя предварительно



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х: |  | 1 |  |  |
|  | 0,3 | 0,2 | 0,5 |

2. Запишем равенства для математического ожидания М(Х) и дисперсии D(X):



Получим нелинейную систему двух уравнений с двумя неизвестными и . Решим её.



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Х: |  | 1 | 2 | 3 |
|  | 0,3 | 0,2 | 0,5 |



5.2 Непрерывные случайные величины

Непрерывной случайной величиной называют величину, которая может принимать любое числовое значение из некоторого конечного (a,b) или бесконечного интервала.

Множество возможных значений такой величины бесконечно.

Примером таких величин являются: величина ошибки при измерении расстояний, веса и др.; время бессбойной работы прибора, размеры детали, рост человека при обследовании определённой группы людей и др.

Закон распределения непрерывной с.в. имеет две формы:

интегральная функция распределения F(x) и дифференциальная функция распределения f(x).

* Как и в случае с дискретной с.в., интегральная функция распределения F(x) имеет вид:

F(x)=P(X<x) (5.12)

Но в отличие от ступенчатой линии для F(x) в случае с дискретной с.в. для непрерывной с.в. имеем непрерывную кривую для F(x).

Свойства F(x):

1. 0F(x)1;



1. если >, то F()F();



1. P(a<X<b)=F(b)-F(a); (5.13)
2. P(X=)=0;



1. если Х (a,b), то ;



1. .



* Дифференциальная функция распределения f(x) (плотность вероятности) есть производная от интегральной функции:

f(x)=



P(a<x<b)= (5.14)



(f(x)dx называется элементом вероятности)

F(x)= (5.15)



Свойства f(x):

1. f(x);



1. (5.16)



1. (



Наиболее употребимыми являются следующие законы распределения непрерывной с.в. (задаются они формулой для f(x)):

* равномерное распределение вероятностей

Пусть [a,b] – шкала некоторого прибора. Вероятность p попадания указателя в некоторый отрезок шкалы [,] равна p=k(-), (k>0).



Тогда, так как

p(a<x<b)=1, то k(b-a)=1 k=



p(<x<)= F(x)=p(a<X<x)= (5.17)



График F(x) на рисунке 11.

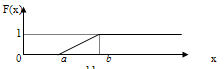


рис.11

f (x)= (5.18)

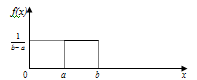


рис.12

* показательное распределение

(5.19)



F(x)= (5.20)



* нормальное распределение

(5.21)



F(x)= (5.22)



Здесь a=M(x), - параметры распределения с.в.Х.



График f(x) представлен на рис.13 и называется нормальной кривой (кривой Гаусса).

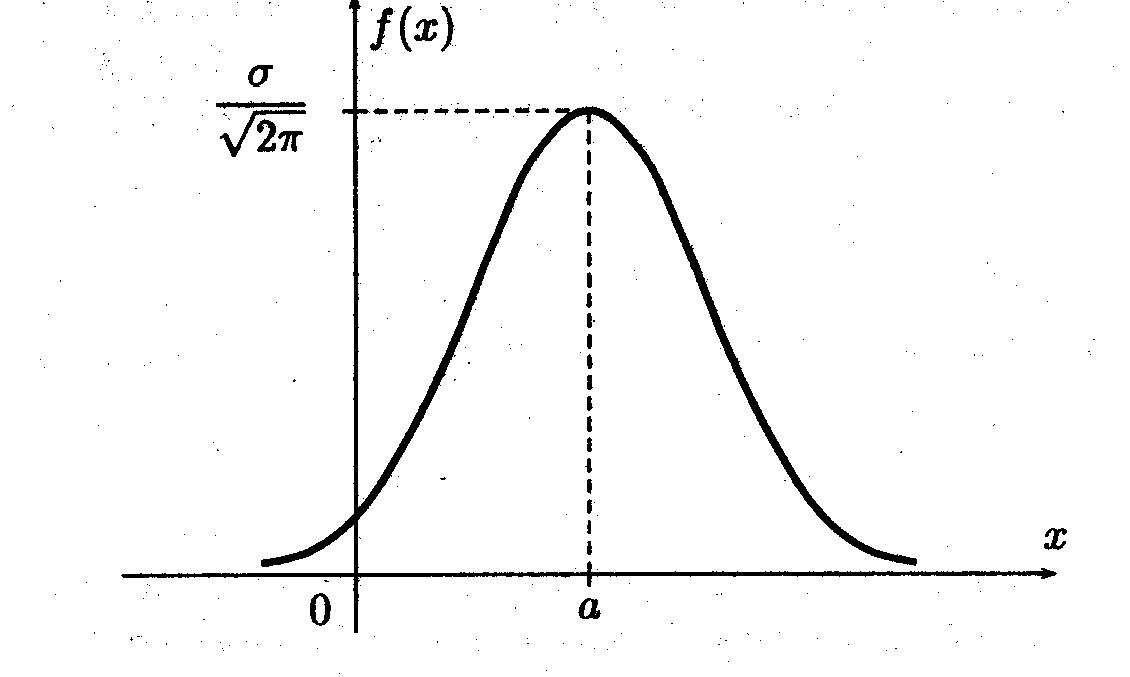


рис.13

При a=0, имеем плотность нормированного распределения:



Эта функция табулирована (см. приложение 1), график её на рис.14.

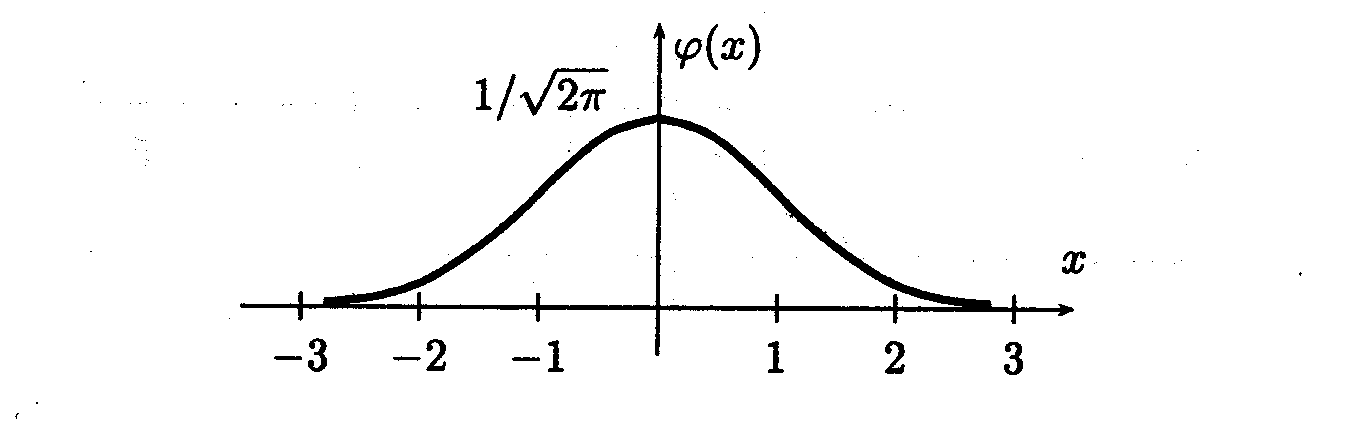


рис.14

В этом случае интегральная функция распределения с.в.Х есть функция Лапласа:

(5.23)



График функции Лапласа Ф(х) на рис.15.

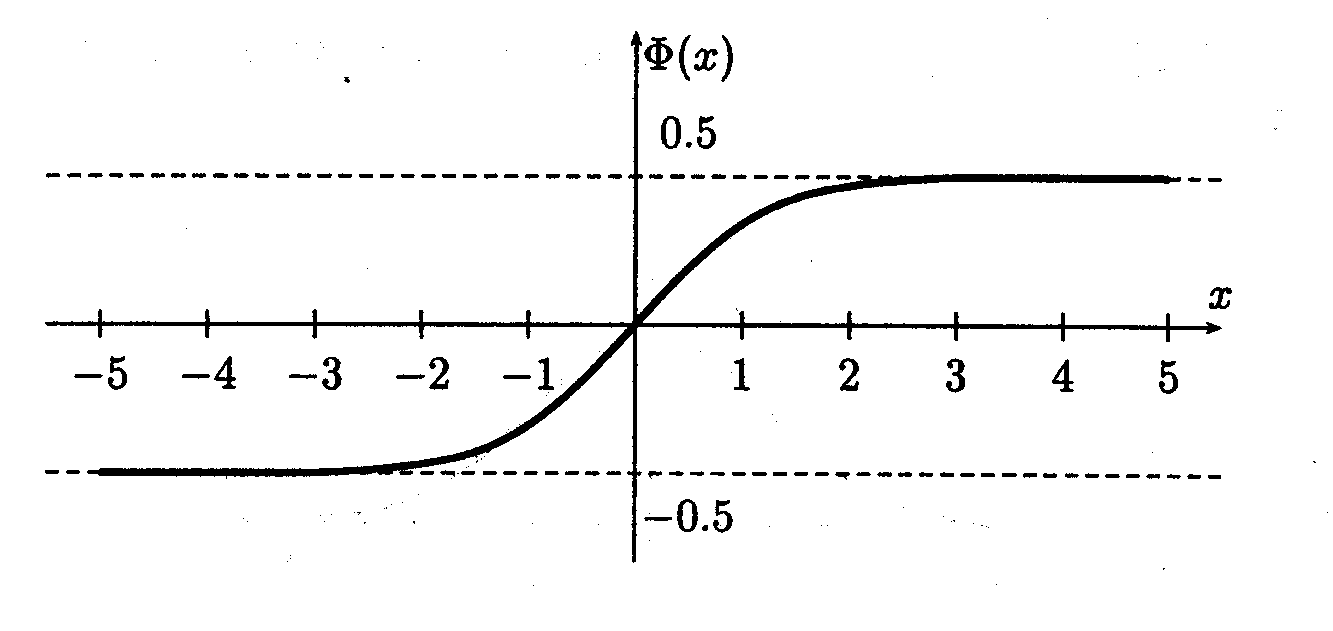


рис.15

Из него видно, что:

1. Ф(0)=0,
2. Ф(-х)=-Ф(х),



Вероятность того, что Х примет значение, принадлежащее интервалу (c,d), находим по формуле:

(5.24)



Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа, равна:

, (5.25)



()



При а=0 справедливо равенство:

(5.25а)



* Числовые характеристики непрерывной с.в.:

- математическое ожидание M(X)

(5.26)



(5.27)



- дисперсия D(X)

(5.28)



(5.29)



Эти равенства можно заменить равносильными равенствами:

(5.30)



(5.31)



- среднее квадратическое отклонение



(5.32)



При этом для равномерного распределения:

(5.33)



(5.34)



(5.35)



Для показательного распределения

:



(5.36); (5.37); (5.38).



Для нормального распределения:

M(X)=a (5.39); (5.40); (5.41).



Задачи

Задача №67. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ждать очередной автобус менее 3-х минут.

Решение. Пусть с.в. Т –время ожидания очередного автобуса – непрерывная случайная величина. Она распределена по равномерному закону с плотностью:

(см. формулу (5.18) )



В нашем случае

0<t<5



По формуле (5.14) имеем:



Искомая вероятность

p=0,6.

Задача №68. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округлены до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка, не превышающая 0,04 (событие А).

Решение. Ошибку округления отсчёта можно рассматривать как с.в. Х, которая распределена равномерно в интервале между 2-мя соседними целыми делениями с плотностью

,



Ошибка отсчёта не превысит 0,04, если она будет заключена в (0; 0,04) или в(0,16;0,2). По формуле (5.14) имеем:



Искомая вероятность

р=0,4.

Задача №69. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичское отклонение с.в. Х, распределённой равномерно в интервале (2,8).

Решение. По формулам (5.32)-(5.34) получим:



.



Задача №70. Непрерывная с.в. Х распределена по показательному закону, заданному при дифференциальной функцией ; при х<0 Найти вероятность того, что в результате испытания Х попадёт в интервал (0,3; 1).



Решение. Исходя из формулы (5.19),



Пользуясь формулой (5.14), получим:



.



Искомая вероятность приближённо равна 0,414.

Задача №71. Непрерывная с.в. Х распределена по показательному закону

.



Найти числовые характеристики с.в. Х и вероятность того, что в результате испытания Х попадёт в интервал (2,5).

Решение.

1. Из формул (5.36)-(5.38) получим:



1. Из формулы (5.14) следует, что:



.



Задача №72. Задана плотность распределения количества прибыли Х:



Найти коэффициент a и вероятность получения величины прибыли Х из отрезка [0,5; 1] млн.гр

Решение.

1) В соответствии с определением модуля х:



– имеем:



1. Используя формулу (5.16) и свойство аддитивности несобственного интеграла, получаем:

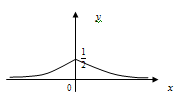


рис.16

.



1. Используя формулу (5.14), получим:



Примечание. Подынтегральная функция , т.к. отрезок [0,5; 1] принадлежит положительной части оси Ох.



Ответ:



Задача №73. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормального распределения случайной величины Х соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания Х примет значение, заключённое в интервале (15,25).

Решение. Воспользуемся формулой (5.24). Подставив

c=15, d=25, a=20, ,



получим:



По таблице (приложение 2) находим Ф(1)=0,3413



Ответ:



Задача №74. Контролируется длина Х выпускаемой детали, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактическая длина детали не менее 32 мм и не более 68 мм.

Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали:

а) больше 55 мм;

б) меньше 40 мм.

Решение.

1) Событие является достоверным



С другой стороны, по формуле (5.24):



Приравниваем правые части равенств для



=1



Теперь имеем: математическое ожидание с.в. Х а=50, среднее квадратическое отклонение



2) Найдём



0,0823.



3)



Задача №75. В каких пределах должна изменяться случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения, чтобы выполнялось равенство: ?



Решение. Согласно формуле (5.25) имеем:



Из таблицы Ф(х) (приложение 2) находим:



Мы получили "правило 3-х сигм": вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределённой случайной величины будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973.

Ответ: (а-3, а+3).



Задача№76. Станок автомат изготавливает детали, длина которых по стандарту может отклоняться от 125 мм не более, чем на 0,5 мм. Среди продукции станка 7% нестандартной.

Считая, что длины деталей имеют нормальное распределение, найти их дисперсию.

Решение. Пусть с.в. Х – длина детали, а=М(Х)=125.

Из условия:



Согласно формуле (5.24) имеем:



Так как станок даёт 7% нестандартной продукции, то:



Искомая дисперсия

D(X)=



Задача №77 ("из жизни хищников").

Для некоторого хищника вероятность удачной охоты равна 0,4 при каждом столкновении с жертвой.

Найти математическое ожидание с.в. Х – числа пойманных жертв при 20-ти столкновениях.

Решение. Случайная величина Х распределена по биномиальному закону при п=20, р=0,4.

Согласно формуле (5.9), имеем:



Приложение 1

Таблица значений функции



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0  0,1  0,2  0,3  0,4  0,5  0,6  0,7  0,8  0,9  1,0  1,1  1,2  1,3  1,4  1,5  1,6  1,7  1,8  1,9  2,0  2,1  2,2  2,3  2,4  2,5  2,6  2,7  2,8  2,9  3,0  3,1  3,2  3,3  3,4  3,5  3,6  3,7  3,8  3,9 | 0,3989  3970  3910  3814  3683  3521  3332  3123  2897  2661  0,2420  2179  1942  1714  1497  1295  1109  0940  0790  0656  0,0540  0440  0355  0283  0224  0175  0136  0104  0079  0060  0,0044  0033  0024  0017  0012  0009  0006  0004  0003  0002 | 3989  3965  3902  3802  3668  3503  3312  3101  2874  2637  2396  2155  1919  1691  1476  1276  1092  0925  0775  0644  0529  0431  0347  0277  0219  0171  0132  0101  0077  0058  0043  0032  0023  0017  0012  0008  0006  0004  0003  0002 | 3989  3961  3894  3790  3652  3485  3292  3079  2850  2613  2371  2131  1895  1669  1456  1257  1074  0909  0761  0632  0519  0422  0339  0270  0213  0167  0129  0099  0075  0056  0042  0031  0022  0016  0012  0008  0006  0004  0003  0002 | 3988  3956  3885  3778  3637  3467  3271  3056  2827  2589  2347  2107  1872  1647  1435  1238  1057  0893  0748  0620  0508  0413  0332  0264  0208  0163  0126  0096  0073  0055  0040  0030  0022  0016  0011  0008  0005  0004  0003  0002 | 3986  3951  3876  3765  3621  3448  3251  3034  2803  2565  2323  2083  1849  1626  1415  1219  1040  0878  0734  0608  0498  0404  0325  0258  0203  0158  0122  0093  0071  0053  0039  0029  0021  0015  0011  0008  0005  0004  0003  0002 | 3984  3945  3867  3752  3605  3429  3230  3011  2780  2541  2299  2059  1826  1604  1394  1200  1023  0863  0721  0596  0488  0396  0317  0252  0198  0154  0119  0091  0069  0051  0038  0028  0020  0015  0010  0007  0005  0004  0002  0002 | 3982  3939  3857  3739  3589  3410  3209  2989  2756  2516  2275  2036  1804  1582  1374  1182  1006  0848  0707  0584  0478  0387  0310  0246  0194  0151  0116  0088  0067  0050  0037  0027  0020  0014  0010  0007  0005  0003  0002  000 | 3980  3932  3847  3726  3572  3391  3187  2966  2732  2492  2251  2012  1781  1561  1354  1163  0989  0833  0694  0573  0468  0379  0303  0241  0189  0147  0113  0086  0065  0048  0036  0026  0019  0014  0010  0007  0005  0003  0002  0002 | 3977  3925  3836  3712  3555  3372  3166  2943  2709  2468  2227  1989  1756  1539  1334  1145  0973  0818  0681  0562  0459  0371  0297  0235  0184  0143  0110  0084  0063  0047  0035  0025  0018  0013  0009  0007  0005  0003  0002  0001 | 3973  3918  3825  3697  3538  3352  3144  2920  2685  2444  2203  1965  1736  1518  1315  1127  0957  0804  0669  0551  0449  0363  0290  0229  0180  0139  0107  0081  0061  0046  0034  0025  0018  0013  0009  0006  0004  0003  0002  0001 |

Приложение 2

Таблица значений функции



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) |
| 0,00  0,01  0,02  0,03  0,04  0,05  0,06  0,07  0,08  0,09  0,10  0,11  0,12  0,13  0,14  0,15  0,16  0,17  0,18  0,19  0,20  0,21  0,22  0,23  0,24  0,25  0,26  0,27  0,28  0,29  0,30  0,31  0,32 | 0,0000  0,0040  0,0080  0,0120  0,0160  0,0199  0,0239  0,0279  0,0319  0,0359  0,0398  0,0438  0,0478  0,0517  0,0557  0,0596  0,0636  0,0675  0,0714  0,0753  0,0793  0,0832  0,0871  0,0910  0,0948  0,0987  0,1026  0,1064  0,1103  0,1141  0,1179  0,1217  0,1255 | 0,33  0,34  0,35  0,36  0,37  0,38  0,39  0,40  0,41  0,42  0,43  0,44  0,45  0,46  0,47  0,48  0,49  0,50  0,51  0,52  0,53  0,54  0,55  0,56  0,57  0,58  0,59  0,60  0,61  0,62  0,63  0,64  0,65 | 0,1293  0,1331  0,1368  0,1406  0,1443  0,1480  0,1517  0,1554  0,1591  0,1628  0,1664  0,1700  0,1736  0,1772  0,1808  0,1844  0,1879  0,1915  0,1950  0,1985  0,2019  0,2054  0,2088  0,2123  0,2157  0,2190  0,2224  0,2257  0,2291  0,2324  0,2357  0,2389  0,2422 | 0,66  0,67  0,68  0,69  0,70  0,71  0,72  0,73  0,74  0,75  0,76  0,77  0,78  0,79  0,80  0,81  0,82  0,83  0,84  0,85  0,86  0,87  0,88  0,89  0,90  0,91  0,92  0,93  0,94  0,95  0,96  0,97  0,98 | 0,2454  0,2486  0,2517  0,2549  0,2580  0,2611  0,2642  0,2673  0,2703  0,2734  0,2764  0,2794  0,2823  0,2852  0,2881  0,2910  0,2939  0,2967  0,2995  0,3023  0,3051  0,3078  0,3106  0,3133  0,3159  0,3186  0,3212  0,3238  0,3264  0,3289  0,3315  0,3340  0,3365 | 0,99  1,00  1,01  1,02  1,03  1,04  1,05  1,06  1,07  1,08  1,09  1,10  1,11  1,12  1,13  1,14  1,15  1,16  1,17  1,18  1,19  1,20  1,21  1,22  1,23  1,24  1,25  1,26  1,27  1,28  1,29  1,30  1,31 | 0,3389  0,3413  0,3438  0,3461  0,3485  0,3508  0,3531  0,3554  0,3577  0,3599  0,3621  0,3643  0,3665  0,3686  0,3708  0,3729  0,3749  0,3770  0,3790  0,3810  0,3830  0,3849  0,3869  0,3883  0,3907  0,3925  0,3944  0,3962  0,3980  0,3997  0,4015  0,4032  0,4049 | 1,32  1,33  1,34  1,35  1,36  1,37  1,38  1,39  1,40  1,41  1,42  1,43  1,44  1,45  1,46  1,47  1,48  1,49  1,50  1,51  1,52  1,53  1,54  1,55  1,56  1,57  1,58  1,59  1,60  1,61  1,62  1,63  1,64 | 0,4066  0,4082  0,4099  0,4115  0,4131  0,4147  0,4162  0,4177  0,4192  0,4207  0,4222  0,4236  0,4251  0,4265  0,4279  0,4292  0,4306  0,4319  0,4332  0,4345  0,4357  0,4370  0,4382  0,4394  0,4406  0,4418  0,4429  0,4441  0,4452  0,4463  0,4474  0,4484  0,4495 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) |
| 1,65  1,66  1,67  1,68  1,69  1,70  1,71  1,72  1,73  1,74  1,75  1,76  1,77  1,78  1,79  1,80  1,81  1,82  1,83 | 0,4505  0,4515  0,4525  0,4535  0,4545  0,4554  0,4564  0,4573  0,4582  0,4591  0,4599  0,4608  0,4616  0,4625  0,4633  0,4641  0,4649  0,4656  0,4664 | 1,84  1,85  1,86  1,87  1,88  1,89  1,90  1,91  1,92  1,93  1,94  1,95  1,96  1,97  1,98  1,99  2,00  2,02  2,04 | 0,4671  0,4678  0,4686  0,4693  0,4699  0,4706  0,4713  0,4719  0,4726  0,4732  0,4738  0,4744  0,4750  0,4756  0,4761  0,4767  0,4772  0,4783  0,4793 | 2,06  2,08  2,10  2,12  2,14  2,16  2,18  2,20  2,22  2,24  2,26  2,28  2,30  2,32  2,34  2,36  2,38  2,40  2,42 | 0,4803  0,4812  0,4821  0,4830  0,4838  0,4846  0,4854  0,4861  0,4868  0,4875  0,4881  0,4887  0,4893  0,4898  0,4904  0,4909  0,4913  0,4918  0,4922 | 2,44  2,46  2,48  2,50  2,52  2,54  2,56  2,58  2,60  2,62  2,64  2,66  2,68  2,70  2,72  2,74  2,76  2,78  2,80 | 0,4927  0,4931  0,4934  0,4938  0,4941  0,4945  0,4948  0,4951  0,4953  0,4956  0,4959  0,4961  0,4963  0,4965  0,4967  0,4969  0,4971  0,4973  0,4974 | 2,82  2,84  2,86  2,88  2,90  2,92  2,94  2,96  2,98  3,00  3,20  3,40  3,60  3,80  4,00  4,50  5,00 | 0,4976  0,4977  0,4979  0,4980  0,4981  0,4982  0,4984  0,4985  0,4986  0,49865  0,49931  0,49966  0,499841  0,499928  0,499968  0,499997  0,499997 |

Литература

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів. Теорія імовірностей та математична статистика – К.: 1999 – 447с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятности – М.: Наука – 1969 – 400с.
3. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбінаторики – М.: Наука – 1977.
4. Жалдак М.И., Квитко А.Н. Теория вероятностей с элементами информатики. Практикум – К.: "Выща школа" – 1989.
5. Жалдак М.І. початки теорії ймовірностей – К.: Рад.шк.. – 1978 – 144с.