**Функциональные ряды (ФР). Степенные ряды (СтР)**

Функциональный ряд– ряд вида

,



члены которого являются функциями от х.

Придавая х различные числовые значения, получаем различные числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться.

Совокупность тех значений х, при которых ФР сходится, называется областью сходимости этого ряда. Область сходимости ФР чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси ОХ.

Частным случаем ФР является степенной ряд.

СтР – ФР вида

,



где а,С0,С1,…,Сn – постоянные числа, называемые коэффициентами ряда. При а=0 СтР принимает вид:



Для всякого СтР существует такой интервал, который называется интервалом сходимости, внутри которого ряд сходится абсолютно; вне этого интервала ряд расходится.

Задан СтР, надо найти интервал сходимости для этого ряда. Находим так:

- радиус сходимости ряда СтР.



-R<x-a<R

a-R<x<a+R

Если взять любое значение х из интервала сходимости (расходимости) и подставить его в СтР вместо х, то получим сходящийся (расходящийся) числовой ряд.

В частном случае R может быть равен 0 (R=0) или (R=).



Если R= то интервал сходимости будет от - до + (-;+), т.е. ряд сходится на всей числовой оси.



Если R=0 то ряд расходится на всей числовой оси, кроме точки х=а (в этой точке ряд сходится).

Для нахождения R СтР применяем формулы Да Ламбера или Коши:

- формула ДаЛамбера



- формула Коши



На концах интервала сходимости, т.е. в точках х=а-R и х=а+R вопрос о сходимости/расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда. Для этого необходимо подставить с СтР вместо х числа х=а-R и х=а+R и исследовать полученные числовые ряды на сходимость или расходимость. Если ряд сходится (расходится), то интервал сходимости будет закрытым (открытым).

*ИТОГ*. Задан СтР. Найти интервал сходимости СтР.

1. Найти R. 2. определить интервал сходимости. 3. исследовать на сходимость концы интервалов.

**Ряды Тейлора и Макларена**

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале (т.е. a-R<x<a+R), может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд по степеням *х-а*, который называется рядом Тейлора и имеет вид:



Это равенство справедливо лишь в том случае, если остаточный член (остаток ряда) формулы Тейлора стремится к нулю (Rn(x)0) при неограниченном возрастании n (), т.е. .



В этом случае написанный справа ряд сходится и его сумма равна данной функции f(x).

f(x)=Sn(x)+Rn(x) Rn(x)=f(x)-Sn(x)



Sn(x)-сумма первых членов; Rn(x)-остаток ряда.

Для оценки остатка ряда можно пользоваться формулой:



остаток ряда в формуле Ла-Гранда, где «с» заключено между «а» и «х» (а<с<х).

Если в ряде Тейлора а=0, то ряд примет вид:



Разложение элементарных функций в ряды Тейлора и Макларена.

1. Разложим в ряд Макларена (то есть по степеням *х*) функцию ex.

Получаем разложение функции в ряд Макларена.

f(x)=ex, f’(x)=ex,…, f(n)(x)=ex,…; a=0, f(0)=1, f’(0)=1,… f(n)(0)=1

Получаем разложение функции f(x)=ex в ряд Макларена:

I.



a=0, Cn=1/n!



Приведем разложение в ряд Макларена следующих функций.

II.



III.



IV.



V.



Приближенные вычисления значений с помощью рядов.

ПРИМЕР. Вычислить с точностью до 0,001 число .



;



;



;



e1/2=1+0.5+0.125+0.0208+0.0026+0.0003=1.648

Приближенные вычисления интегралов с помощью рядов.

Пример. Функция , с точностью до 0,001.



**Ряды Фурье**

Теорема Дерихле: функция f(x) удовлетворяет условиям Дерихле в интервале (а,в), если в этом интервале функция удовлетворяет трем условиям:

1). Равномерно ограничена (при x(a;b), т.е. a<x<b , M=const).



2). Имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода.

3). Имеет не более чем конечное число точек экстремума.

Теорема Дерихле утверждает, что если функция f(x) удовлетворяет в интервале () условиям Дерихле, то во всякой точке (х) этого интервала функцию f(x) можно разложить в тригонометрический ряд Фурье.



,



где an и bn называются коэффициентами Фурье и вычисляются по формулам:



Для разложения функции в ряд Фурье надо вычислить коэффициенты а0, аn, bn.

**Неполные ряды Фурье**

Если функция f(x) четная, т.е. f(-x)=f(x), то в формулах (1) bn=0 (n=1,2,…),



Если функция f(x) нечетная, т.е. f(-x)=-f(x), то an=0 (n=0,1,2…), .



Ряды Фурье периода 2l.

Если f(x) удовлетворяет условиям Дерихле в некотором интервале (-*l;l*) длины 2*l*, то справедливо следующее разложение в ряд Фурье:



ряд Фурье периода 2*l*, т.е. в интервале (-*l;l*), где коэффициенты вычисляются:



Замечание: в случае разложения функции f(x) в ряд Фурье в произвольном интервале (a; a+2*l*) длины 2*l* пределы интегрирования в формулах (2), у коэффициентов Фурье нужно заменить соответственно на (а) и (a+2*l*).



**Теория вероятностей**

Основным понятием в теории вероятностей являются понятия события и вероятности события, которые бывают трех видов:

-Достоверные- событие, которое обязательно произойдет.

-Невозможное- событие, которое заведомо не произойдет.

-Случайное- событие, которое может либо произойти, либо не произойти.

События обозначаются буквами А,В,С и т.д.

Вероятность события – буквой Р.

Вероятность события А называется равенство Р(А)=m/n, n-общее число возможных элементарных исходов; m-число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события А. Следовательно:

1. вероятность достоверного события есть 1 (m=n).

2. вероятность невозможного события есть 0.

3. вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1, т.е. 1>=Р(А)>=0. Следовательно, какое бы ни было событие, его вероятность заключена в промежутке [0;1].

События называются несовместимыми, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Например, брошена монета. Событие А-выпал герб, В-выпала решка. События А и В – несовместимые, т.к., если при одном бросании выпал герб, то решки уже не будет, т.е. несовместимые события не могут появиться одновременно. При одном бросании монеты не могут одновременно…

События равновозможны, если нет никаких причин считать, что одно из них может наступить чаще чем другое.

Например, появление герба или решки при бросании монеты. Или бросании игральных костей. Найти вероятность выпадения 6. Р(А)=1/6-равновозможные несовместимые события.

События образуют полную группу, если в результате испытания произойдет хотя бы одно из них.

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна 1.

Например, герб или решка при выпадении.

В дальнейшем при решении многих задач, а так же в некоторых формулах будет присутствовать понятие из комбинаторики, называемое «сочетание» - сочетание из n по m элементов.



число сочетаний из n элементов по m. Это число способов, которыми можно взять m элементов из n.

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Суммой *А+В* двух событий *А* и *В* называется событие, состоящее в появлении события *А* или *В* или их обоих.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

Р(А+В)=Р(А)+Р(В)

Эта теорема распространяется и на n слагаемых, когда события попарно несовместимы.

Пример.

В ящике 10 деталей, из которых … окрашены. Взяли 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

А- хотя бы одна окрашена.

Первый способ.

В- одна деталь окрашена (2 не окрашены).

С- две детали окрашены (1 не окрашена).

Д- три детали окрашены.

Интересующее событие произойдет, если произойдет одно из трех событий В,С или Д.

А=В+С+Д.

Р(А)=Р(В)+Р(С)+Р(Д)==5/6



Второй способ.

Рассмотрим понятие противоположных событий.

Событием, противоположным событию А называется событие , состоящее вне наступлении события А. Очевидно, что события А и несовместны.



Например: А- стрелок поразил мишень; - стрелок промахнулся. В дальнейшем вероятность появления события А будем обозначать р, а вероятность появления противоположного события - q.



Теорема: сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

Р(А)+Р()=1 или p+q=1



А- хотя бы одна из деталей окрашена. Тогда - ни одна из трех деталей не окрашена.



Р(А)+Р()=1. Р(А)=1-Р()=5/6



Два события называются независимыми (зависимыми), если вероятность одного из них не зависит (зависит) от появления или не появления другого.

Произведением А\*В двух событий А и В, называется событие, состоящее в совместном наступлении события А и В.

Теорема умножения вероятностей независимых событий.

Вероятностью совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Р(А\*В)=Р(А)\*Р(В)

Эта теорема распространяется и на n сомножителей, когда события попарно независимы.

Пример 1(51).

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятное попадание в мишень при одном выстреле равна 0,7 и 0,8 соответств. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет:

А). только 1 из стрелков.

Б). Оба попадут.

В). оба промажут.

A- первый попал. В- второй попал.

Р(А)=р1=0,7 Р(В)=р2=0,8

- первый промах. - второй промах.



Р()=q1=0,3 Р()=q2=0,2



А). Р(A)Р()+Р()Р(B)=p1q1+p2q2=0,38



Б). Р(А)\*Р(В)=p1\*p2=0,56

В). Р()\*Р()=q1\*q2=0,6.



Проверка: 0,38+0,56+0,6=1.

Пример 2. Пример 3 (55). Пример 4 (56).

Вероятность события А при условии, что произошло событие В, называется условной вероятностью события А и обозначается РВ(А) – вероятность события А при условии, что событие В уже произошло.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Вероятность совместного проявления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго.

Р(А\*В)=Р(А)\*РА(В)

Р(А\*В)=Р(А)\*РВ(В)

Вероятность появления хотя бы одного события.

Пусть в результате испытаний может произойти n независимых событий А1,А2…, либо некоторые из них Р(А1)=р1, Р()=q1… Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий?



Теорема.

Вероятность появления хотя бы одного из событий А1, А2…, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий, т.е.

Р(А)=1-q1q2…qn

Замечание.

Если все события имеют одинаковую вероятность Р, то

Р(А)=1-qn.

Примеры 82, 87, Д/з.

Формула полной вероятности.

События В1,В2,…,Вn являются несовместимыми и образуют полную группу, т.е. Р(В1)+ Р(В2)+…+ Р(Вn)=1. И пусть событие А может наступить лишь при появлении одного из событий В1,В2,…,Вn. Тогда вероятность события А равна сумме вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А.

Р(А)=Р(В1)РВ1(А)+ Р(В2)РВ2(А)+…+ Р(Вn)РВn(А)

**Формула Бейеса**

События В1,В2,…,Вn являются несовместимыми и образуют полную группу, т.е. Р(В1)+ Р(В2)+…+ Р(Вn)=1. И пусть событие А может наступить лишь при появлении одного из событий В1,В2,…,Вn. Тогда вероятность события А находится по формуле полной вероятности.

Пусть событие А уже произошло. Тогда вероятности гипотез В1,В2,…,Вn могут быть переоценены по формуле Бейеса:



**Формула Бернулли**

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может или наступить или не наступить. Вероятность наступления (не наступления) события А одна и та же и равна p (q=1-p).

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие А наступит ровно к раз (по фиг, в какой последовательности), находится по формуле Бернулли:



Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит:

а). Менее к раз Pn(0)+Pn(1)+…+Pn(k-1).

б). Более к раз Pn(k+1)+Pn(k+2)+…+Pn(n).

в). не менее к раз Pn(k)+Pn(k+1)+…+Pn(n).

Г). не более к раз Pn(0)+Pn(1)+…+Pn(k).

Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Этими теоремами мы пользуемся в том случае, когда n достаточно большое.

**Локальная теорема Лапласа**

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит ровно ‘к’ раз, приближенно равно:

,



Таблица функций для положительных значений (х) приведена в задачнике Гмурмана в Приложении 1, стр.324-325.



Так как четная (), то для отрицательных значений (х) пользуемся той же самой таблицей.



Интегральная теорема Лапласа.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит не менее ‘к’ раз, приближенно равно:

,



**Функция Лапласа**



Таблица функций для положительных значений [5<=x<=5] приведена в задачнике Гмурмана в Приложении 2, стр.326-327. Для значений, больших 5 полагаем Ф(х)=0,5.



Так как функция Лапласа нечетная Ф(-х)=-Ф(х), то для отрицательных значений (х) пользуемся той же самой таблицей, только значения функции берем со знаком минус.

**Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины**

Биноминальный закон распределения.

Дискретная – случайная величина, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Другими словами, возможные значения дискретной случайной величины можно пронумеровать.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Дискретные случайные величины обозначаются большими буквами Х, а их возможные значения – маленькими х1, х2, х3…

Например.

Х – число очков, выпавших на игральной кости; Х принимает шесть возможных значений: х1=1, х2=1, х3=3, х4=4, х5=5, х6=6 с вероятностями р1=1/6, р2=1/6, р3=1/6 … р6=1/6.

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

Закон распределения может быть задан:

1. в виде таблицы.

2. Аналитически - в виде формулы.

3. графически. В этом случае в прямоугольной системе координат ХОР строятся точки М1(х1,р1), М2(х2,р2), … Мn(хn,рn). Эти точки соединяют отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником распределения.

Для написания закона распределения дискретной случайной величины (х), надо перечислить все ее возможные значения и найти соответствующие им вероятности.

Если соответствующие им вероятности находятся по формуле Бернулли, то такой закон распределения называется биномиальным.

Пример №168, 167, 171, 123, 173, 174, 175.

Числовые значения дискретных случайных величин.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Характеристикой среднего значения дискретной случайной величины служит математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности. Т.е. если задан закон распределения, то математическое ожидание



Если число возможных значений дискретной случайной величины бесконечно, то



Причем ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно, и сумма всех вероятностей рi равна единице.

Свойства математического ожидания.

1. М(С)=С, С=пост.

2. М(Сх)=СМ(х)

3. М(х1+х2+…+хn)=М(х1)+М(х2)+…+М(хn)

4. М(х1\*х2\*…\*хn)=М(х1)\*М(х2)\*…\*М(хn).

5. Для биноминального закона распределения математическое ожидание находится по формуле:

М(х)=n\*р

Характеристикой рассеяния возможных значений случайно величины вокруг математического ожидания служат дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Дисперсией дискретной случайной величины (х) называют математическое ожидание квадрата отклонения. Д(х)=М(х-М(х))2.

Дисперсию удобно вычислять по формуле: Д(х)=М(х2)-(М(х))2 .

Свойства дисперсии.

1. Д(С)=0, С=пост.

2. Д(Сх)=С2Д(х)

3. Д(х1+х2+…+хn)=Д(х1)+Д(х2)+…+Д(хn)

4. Дисперсия биноминального закона распределения

Д(х)=nрq

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии.



примеры. 191, 193, 194, 209, д/з.

Интегральная функция распределения (ИФР, ФР) вероятностей непрерывной случайной величины (НСВ). Непрерывная – величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений НСВ естьи его невозможно перенумеровать.



Например.

Расстояние, которое пролетает снаряд при выстреле, есть НСВ.

ИФР называют функцию F(x), определяющую для каждого значения х вероятность того, что НСВ Х примет значение Х<х, т.е. F(x)=Р(X<x).

Часто вместо ИФР говорят ФР.

Геометрически, равенство F(x)=Р(X<x) можно растолковать: F(x) есть вероятность того, что НСВ Х примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки х.

Свойства ИФ.

1. Значение ИФ принадлежит промежутку [0;1], т.е. F(x).



2. ИФ есть неубывающая функция, т.е. х2>х1,.



Следствие 1. Вероятность того, что НСВ Х примет значение, заключенное в интервале (а;в), равна приращению интегральной функции на этом интервале, т.е.

P(a<x<b)=F(b)-F(a)

Следствие 2. Вероятность того, что НСВ Х примет одно определенное значение, например, х1=0, равна 0, т.е. Р(х=х1)=0.

3. Если все возможные значения НСВ Х принадлежат (а;в), то F(x)=0 при x<а, и F(x)=1 при х>в.

Следствие 3. Справедливы следующие предельные отношения.

Дифференциальная функция распределения (ДФР) вероятностей непрерывной случайной величины (НСВ) (плотность вероятности).

ДФ f(x) распределения вероятностей НСВ называют первую производную от ИФР:

f(x)=F’(x)

Часто вместо ФДР говорят плотность вероятности (ПВ).

Из определения следует, что, зная ИФ F(x) можно найти ДФ f(x). Но выполняется и обратное преобразование: зная ДФ f(x), можно найти ИФ F(x).

;



;



Вероятность того, НСВ Х примет значение, принадлежащее (а;в), находится:

А). Если задана ИФ – следствие 1.

Б). Если задана ДФ



Свойства ДФ.

1. ДФ – не отрицательная, т.е. .



2. несобственный интеграл от ДФ в пределах (), равен 1, т.е. .



Следствие 1. Если все возможные значения НСВ Х принадлежат (а;в), то .



Примеры. №263, 265, 266, 268, 1111, 272, д/з.

Числовые характеристики НСВ.

1. Математическое ожидание (МО) НСВ Х, возможные значения которой принадлежат всей оси ОХ, определяется по формуле:



Если все возможные значения НСВ Х принадлежат (а;в), то МО определяется по формуле:



Все свойства МО, указанные для дискретных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

2. Дисперсия НСВ Х, возможные значения которой принадлежат всей оси ОХ, определяется по формуле:



Если все возможные значения НСВ Х принадлежат (а;в), то дисперсия определяется по формуле:



Все свойства дисперсии, указанные для дискретных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

3. Среднее квадратичное отклонение НСВ Х определяется также, как и для дискретных величин:



Примеры. №276, 279, Х, д/з.

Операционные исчисления (ОИ).

ОИ представляет собой метод, позволяющий свести операции дифференцирования и интегрирования функций к более простым действиям: умножение и деление на аргумент так называемых изображений этих функций.

Использование ОИ облегчает решение многих задач. В частности, задач интегрирования ЛДУ с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений, сводя их к линейным алгебраическим.

Оригиналы и изображения. Преобразования Лапласа.

f(t)-оригинал; F(p)-изображение.

Переход f(t)F(p) называется преобразование Лапласа.



Преобразование по Лапласу функции f(t) называется F(p), зависящая от комплексной переменной и определяемая формулой:



Этот интеграл называется интеграл Лапласа. Для сходимости этого несобственного интеграла достаточно предположить, что в промежутке f(t) кусочно непрерывна и при некоторых постоянных М>0 и удовлетворяет неравенству



Функция f(t), обладающая такими свойствами, называется оригиналом, а переход от оригинала к его изображению, называется преобразованием Лапласа.

Свойства преобразования Лапласа.

Непосредственное определение изображений по формуле (2) обычно затруднено и может быть существенно облегчено использованием свойств преобразования Лапласа.

Пусть F(p) и G(p) являются изображениями оригиналов f(t) и g(t) соответственно. Тогда имеют место следующие свойства-соотношения:

1. С\*f(t)С\*F(p), С=const -свойство однородности.



2. f(t)+g(t)F(p)+G(p) –свойство аддитивности.



3. f(t)F(p-) -теорема смещения.



4.



переход n–ой производной оригинала в изображение (теорема дифференцирования оригинала).



5. y”+py’+qy=0; f(x)=eaxPn’(x)



**Теорема дифференцирования изображения**

Таблица изображений основных элементарных функций. Нахождение изображений по оригиналу (переход от оригинала к изображению).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| **1** | **11/p** | **5** | **tnn!/p(n+1)** | **9** |  |
| **2** | **CC/p** | **6** |  |
| **3** |  | **7** |  | **10** |  |
| **4** | **t1/p2** | **8** |  |

Нахождение оригинала по изображению (обращение изображения - ОИ).

Отыскание оригинала по известным изображениям называется обращением изображения.

В простейших случаях эта операция выполняется с помощью таблицы и свойств преобразования Лапласа. При интегрировании дифференциальных уравнений возникает необходимость обращать правильные рациональные дроби. Всякую рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей вида:



А).A/(p-a); Б).A/(p-a)n; В).(Ap+B)/(p2+pa+b); Г). (Ap+B)/(p2+pa+b)2